Fakultät Informatik/Mathematik

Lehrstuhl für Stochastik

HOCHSCHULE FÜR
TECHNIK UND WIRTSCHAFT
DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorlesungsmitschrift

MATHE 1

Mitschrift von

Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von

Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger / Michael Meinhold

24. Mai 2017

INHALTSVERZEICHNIS

1 ELEMENTARE GRUNDLAGEN

1.1 AUSSAGEN UND GRUNDZÜGE DER LOGIK

1.2 MENGEN

@alias-@alias@alias @alias-@before@alias.texfilehook@atbegin@@alias.tex @alias @alias.texfilehook@atend@@alias.tex@alias-@after

1.3 ZAHLEN

1.3.1 GRUPPEN, RINGE, KÖRPER

- Gegeben sei eine Menge M und eine zweistellige Operation $\circ$ (d.h. Abb. von $M \times M$ in M)
  Bezeichnung: $(M, \circ)$, analog $(M, \circ, *)$
- Die Operation $\circ$ heißt KOMMUTATIV, wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$.
- Die Operation $\circ$ heißt ASSOZIATIV, wenn $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in M$.

Def. 1:
$(M, \circ)$ heißt GRUPPE, wenn gilt:

(1) Die Operation $\circ$ ist assoziativ

(2) Es gibt genau ein NEUTRALES ELEMENT $e \in M$ mit $a \circ e = e \circ a = a$ (für alle $a \in M$)

(3) Es gibt zu jedem $a \in M$ genau ein INVERSES ELEMENT a^{-1} mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

(4) Eine Gruppe heißt ABELSCH, wenn zusätzlich folgendes gilt:
$\circ$ ist kommutativ

Def. 2:
$(M, \oplus, *)$ heißt RING, wenn gilt:

(1) $(M, \oplus)$ ist eine ABELsche Gruppe.

(2) Die Operation $*$ ist assoziativ.

(3) Es gelten für beliebige $a, b, c \in M$:
$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$
$(a \oplus b) * c = (a * c) \oplus (b * c)$ (Distributivgesetze)

(4) Ein Ring heiß KOMMUTATIVER RING, wenn gilt:
$*$ ist kommutativ

Def. 3:
$(M, \oplus, *)$ heißt KÖRPER, wenn gilt:

(1) $(M, \oplus, *)$ ist ein Ring
(mit dem neutralen Element E_0 für die Operation $\oplus$)

(2) $(M \setminus \{E_0\}, *)$ ist eine ABELsche Gruppe
(mit dem neutralen Element E_1 für die Operation $*$)

1.3.2 ZAHLENTHEORIE

- Eine natürliche Zahl $p > 1$, die nurch durch 1 und sich selbst teilbar ist heißt PRIMZAHL.
- Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist entweder eine Primzahl, oder sie lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.
  Diese sogenannte PRIMFAKTORZERLEGUNG ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Def. 4:
Zwei natürliche zahlen aus $\mathbb{N}^*$ heißen TEILERFREMD, wenn sie außer 1 keine gemeinsamen teiler besitzen.

- Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung der Gestalt $\boxed{a = q \cdot m + r}$ mit $\boxed{0 \leq r < m}$ und $q \in \mathbb{Z}$.
  Bezeichnung: m ... MODUL $\qquad r$ ... (kleinste nichtnegative) REST MODULO M ($r \equiv mod(a, m)$)
- Zur Erinnerung: a und b seien ganze Zahlen, $m \in \ltimes^*$, dann $a \equiv b(mod\ m)$ [a kongruent b $modulo\ m$]
  $\Leftrightarrow$ a und b haben den gleicher Rest $modulo\ m$
  $\Leftrightarrow$ $a - b$ ist durch m teilbar (d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = k \cdot m$)

  Satz 1:
  Es sei $a \equiv b(mod\ m)$, $c \equiv d(mod\ m)$, dann gilt: $a + c \equiv b + d(mod\ m)$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$ (d.h. in Summen und Produktenn darf jede Zahl durch einen beliebigen Vertreter der gleichen Restklasse ersetzt werden).

  Bsp. 1:
  a) $307 + 598 \equiv 1 + (-2) \equiv -1 \equiv 5(mod\ 6)$
  b) $307 \cdot 598 \equiv 1 \cdot (-2) \equiv -2 \equiv 4(mod\ 6)$
  c) $598^6 \equiv (-2)^6 \equiv 64 \equiv 4(mod\ 6)$

- Man wählt aus jeder Restklasse den kleinsten nichtnegativen Vertreter
  $\curvearrowright$ Menge von Resten $modulo\ m$: $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, ..., m - 1\}$
  $\curvearrowright$ „modulare Arithmetik“: Operation $\oplus$ und $\odot$ für Zahlen aus $\mathbb{Z}_m$ erklärbar, in dem für das Ergebnis jeweils der kleinste nichtnegative Rest $modulo\ m$ gewählt wird (vgl. Satz 1)
  z.B. $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, ..., 6\}$, $\quad 5 \oplus 4 = 2$, da $5 + 4 \equiv 9 \equiv 2(mod\ 7) \quad 5 \odot 6 = 2$, da $5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 2(mod\ 7)$

  Falls keine Verwechselung zu befürchten ist, wird die übliche Schreibweise $+$ und $\cdot$ anstelle von $\oplus$ und $\odot$ verwendet.

Def. 5:
Wenn es zu $c \in \mathbb{Z}_m$ eine Zahl $d \in \mathbb{Z}_m$ gibt, mit $c \cdot d \equiv 1 (mod\ m)$ (bzw. $c \odot d \equiv 1$), so heißt d die (MULTIPLIKATIVE) MODULARE INVERSE zu c in $\mathbb{Z}_m$.
Bezeichnung: $d = c^{-1}$

Bsp. 2:
$c = 3 \in \mathbb{Z}_7$, wegen $3 \cdot 5 \equiv 1 (mod\ 7)$ ist (in $\mathbb{Z}_7$) $3^{-1} = 5$.

Satz 2: Zu $a \in \mathbb{Z}_m, a \neq 0$, gibt es genau dann eine modulare Inverse in $\mathbb{Z}_m$, wenn a und m teilerfremd sind ($ggT(a, m) = 1$).

Satz 3: Es sei p eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein Körper.
Bemerkung: Falls m keine Primzahl ist, so ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring.

EUKLIDischer Algorithmus

- Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers t zweier positiver natürlicher Zahlen, $t = ggT(a, b)$.
- In erweiterter Form bietet der Algorithmus eine Möglichkeit zur Bestimmung der modularen Inversen von a zum Modul m (mit $a < m$ und a, m teilerfremd).

Satz 4: (EUKLIDischer Algorithmus)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Man bildet die endliche Folge
$r_0 := b,\ r_1 = mod\ (a, b),\ r_2 = mod\ (r_0, r_1), ...,\ r_n = mod\ (r_{n-2}, r_{n-1})$, Abbruch falls $r_n = 0$.
In diesem Fall gist $\boxed{ggT(a, b) = r_{n-1}}$ (letzter nicht verschwindender Rest).
Bezeichnung: j-te Division ... $\boxed{r_{j-2} : r_{j-1} = q_j \text{ Rest } r_j}$ $(j = 1, ..., n)$ (dabei $r_1 := a$).

Satz 5: (erweiterter EUKLIDischer Algorithmus)
Zusätzlich zur Folge (r_n) aus Satz 4 bilde man die Folgen
$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = x_0 - q_2 x_1, ...,\ x_j = x_{j-2} - q_j x_{j-1} \quad (j \leq n - 1)$ und
$y_0 = 1,\ y_1 = -q_1,\ y_2 = y_0 - q_2 y_1, ...,\ y_j = y_{j-2} - q_j y_{j-1} \quad (j \leq n - 1)$
Dann gilt für alle $j = 0, ...,\ n - 1$: $\boxed{r_j = x_j \cdot a + y_j \cdot b}$
Insbesondere gilt $\boxed{ggT(a, b) = x_{n-1} \cdot a + y_{n-1} \cdot b}$

Diskussion:

(1) Der Sinn der erweiterten EUKLIDischen Algorithmus besteht darin, in jedem Schrit den DIVISIONSREST r ALS LINEARKOMBINATION VON a UND b MIT GANZZAHLIGEN KOEFFIZIENTEN x UND y darzustellen: $r = x \cdot a + y \cdot b$
Der Mechanismus wird am besten im Rechenschema des nachfolgenden Bsp. 4 deutlich.

(2) Sind c und m teilerfremd, $1 \leq c < m$, d.h. $ggT(m, c) = 1$, so erhält man mit dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus ($a = m, b = c$) eine Darstellung in der Form $\boxed{1 = x \cdot m + y \cdot c}$.
$\curvearrowright y \cdot c \equiv 1 (mod\ m)$ und damit $c^{-1} \equiv y (mod\ m)$ (für die modulare Inverse muss eventuell noch der in $\mathbb{Z}_m$ liegende, zu y kongruente, Wert gebildet werden!).

Bsp. 3:
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler t sowie das kleinste gemeinsame Vielfache v der Zahlen 132 und 84.

- Es genügt der „einfache“ Algorithmus:

$$\begin{aligned} 132 : 84 &= 1 \text{ Rest } 48 \\ 84 : 48 &= 1 \text{ Rest } 36 \\ 48 : 36 &= 1 \text{ Rest } 12 \qquad \curvearrowright t = ggT(132, 84) = \underline{\underline{12}} \\ 36 : 12 &= 3 \text{ Rest } \boxed{0} \curvearrowright \text{ Ende.} \end{aligned}$$

- $v = \dfrac{a \cdot b}{t} = \dfrac{132 \cdot 84}{12} = \underline{\underline{924}} = kgV(132, 84)$

Bsp. 4:
Man ermittle die modulare Inverse von $\overbrace{11}^{b}$ zum Modul $\overbrace{25}^{a}$.

			11	$= 0 \cdot 25 + 1 \cdot 11$ (1)
$25 : 11$	$= 2$ Rest 3	$3 = 25 - 2 \cdot 11$	3	$= 1 \cdot 25 - 2 \cdot 11$ (2)
$11 : 3$	$= 3$ Rest 2	$2 = 11 - 3 \cdot 3$	2	$= -3 \cdot 25 + 7 \cdot 11$ (3)
$3 : 2$	$= 1$ Rest 1	$1 = 3 - 2$	$\boxed{1}$	$= 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11$
$2 : 1$	$= 2$ Rest 0			

$\curvearrowright (-9) \cdot 11 \equiv 1 (mod\ 25)$
$\curvearrowright 11^{-1} \equiv -9 \equiv 16 (mod\ 25)$, die Inverse von 11 in $\mathbb{Z}_{25}$ ist 16.
Zu den Schritten:

(1) $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

(2) mittleres Feld als Linearkombination

(3) ab hier Rechnung links spaltenweise durchführen, dabei Faktoren a und b beibehalten.

EULERSCHE φ-FUNKTION, SATZ VON EULER

Def. 6:
Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann EULERSCHE φ-FUNKTION:
$\varphi(n) :=$ Anzahl der zu n teilerfremden Elemente aus $\{1, 2, ..., n\}$. Eigenschaften der φ-Funktion:

- Es sei p eine Primzahl, dann ist $\boxed{\varphi(p) = p - 1}$, $\boxed{\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)}$ $(k \in \mathbb{N}^*$
- Falls $ggT(m, n) = 1$, so gilt $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
- Speziell: $n = p \cdot q$ $(p, q$ Primzahlen), dann $\boxed{\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)}$ (1).

Satz 6: (Satz von EULER)
Es sei $ggT(a, n) = 1$, dann gilt:
$\boxed{a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\ n)}$ (2).

RSA-VERSCHLÜSSELUNG

- Die Formeln (1) und (2) [siehe oberhalb] bilden die Grundlage für die sogenannte RSA-Verschlüsselung (RIVES, SHAMIR, ADLEMAN - 1978)
- Schlüsselerzeugung:
  (1) Man wählt (in der Praxis sehr große) Primzahlen d und q.
  (2) $n := p \cdot q$, $m := \varphi(n) \overset{(1)}{=} (p-1)(q-1)$
  (3) e wird so gewählt, dass $ggT(e, m) = 1$
  (4) $d := e^{-1}(mod\, m)$ (modulare Inverse)
  (5) (n, e) ... öffentlicher Schlüssel
  (n, d) ... geheimer Schlüssel (geheim ist nur d)
  p, q und m werden nicht mehr benötigt, bleiben aber geheim!
- Verschlüsselung:
  Klartext a teilerfremd zu n verschlüsseln mit e, d.h. $b :\equiv a^e(mod\, n)$ bilden (b ... Geheimtext)
- Entschlüsselung:
  Der Empfänger und Besitzer des geheimen Schlüssels bildet $b^d(mod\ \ m)$ und erhält $b^d \equiv a(mod\, n)$ denn $b^d \equiv (a^e)^d \equiv a^{ed} \equiv a^{1+k\cdot m} \equiv a \cdot \underbrace{\left(a^{\varphi(n)}\right)}_{\equiv 1 \text{ wegen Satz 5}}{}^{k} \equiv a(mod\, n)$.
- Praktische Durchführung vgl Übungsaufgabe 2.4

1.3.3 REELLE ZAHLEN

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen.
Auf $\mathbb{R}$ existiert eine algebraische Struktur und eine Ordnungsstruktur.

1.3.3.1 ALGEBRAISCHE STRUKTUR

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den arithmetischen Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) ist ein Körper.

Def. 7:

a.) $\boxed{0! := 1,\ n! = n \cdot (n-1)!}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ FAKULTÄT (rekursive Funktion)

b.) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$, dann sei $\boxed{\binom{\alpha}{0} := 1, \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1}}$ Binominalkoeffizient α über k.

d.h. $\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k-1)}{k!}}$

Diskussion:

(1) Für $k, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$ gilt $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

(2) Für $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}}$

(3) BINOMISCHER LEHRSATZ: $(a+b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + ... + b^n$

PASCALSCHES DREIECK:

					1							$n=0$
				1		1						1
			1		2		1					2
		1		3		3		1				3
	1		4		6		4		1			4
1		5		10		10		5		1		5

(Spalte $\widehat{=} k$ in $\binom{n}{k}$)

Stellenwertsysteme:

- Es sei $k > 1$ eine natürliche Zahl (die sogenannte Basis)
- $x = (\underbrace{x_p x_{p-1} ... x_1 x_0}_{\text{Vorkomma}}, \underbrace{x_{-1} x_{-2} ... x_{-q}}_{\text{Nachkomma}})_b$
  $:= \underbrace{x_p \cdot b^p + x_{p-1} \cdot b^{p-1} + ... + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0}_{\text{Vorkomma}} + \underbrace{x_{-1} \cdot b^{-1} + x_{-2} \cdot b^{-2} + ... + x_{-q} \cdot b^{-q}}_{\text{Nachkomma}}$
  heißt Darstellung zur Basis b (*).

Bsp. 5:

- $b = 2$ ... DUAL- ODER BINÄRSYSTEM (Ziffern $\{0, 1\}$)
- $b = 3$ ... Trialsystem
- $b = 10$ ... DEZIMALSYSTEM
- $b = 16$ ... HEXADEZIMALSYSTEM (Ziffern $\{0, 1, 2, ..., 9, \underset{10}{A}, \underset{11}{B}, \underset{12}{C}, \underset{13}{D}, \underset{14}{E}, \underset{15}{F}\}$

z.B. $(47)_{10} = (101111)_2 = (1202)_3 = (57)_8 = (2F)_{16}$

Übergang von einem Ziffernsystem zu einem anderen

z.B. $p = 3,\ q = 2$

$$\begin{aligned} x &= x_3 b^3 + x_2 b^2 + x_1 b^1 + x_0 + x_{-1} b^{-1} + x_{-2} b^{-2} \\ &= (x_3 b^2 + x_2 x^1 + x_1) b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2} b^{-1}) b^{-1} \\ &= ((x_3 b^1 + x_2) b + x_1) b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2} b^{-1}) b^{-1} \end{aligned}$$

Grundlage: fortgesetztes Klammern:

$$\begin{aligned} x = ((....((x_p b + x_{p-1}) b + x_{p-2}) b + ... + x_2) b + x_1) b + x_0 + \\ ((...(x_{-q} b^{-1} + x_{-(q-1)}) b^{-1} + ... + x_{-2}) b^{-1} + x_{-1}) b^{-1} \end{aligned}$$

(**)

Bsp. 6: Übergang Dezimalsystem $\rightarrow$ anderes System

- ganzer Teil: fortgesetzte Division durch b und Restabspaltung liefert b-Ziffern in der Reihenfolge $x_0, x_1, x_2, ...$
- gebrochener Teil: fortgesetzte Multiplikation mit b und Abspaltung des ganzzahligen Anteils liefert b-Ziffern in der Reihenfolge $x_{-1}, x_{-2}, ...$

z.B. Dezimalsystem $\rightarrow$ Hexadezimalsystem ($b = 16$)
$x = 435,9$
ganzer Teil:

$$\begin{array}{rcll}
435 : 16 = & 27 & \text{Rest } 3 & \rightarrow x_0 \\
27 : 16 = & 1 & \text{Rest } 11 & \rightarrow x_1 \\
1 : 16 = & \boxed{0} & \text{Rest } 1 & \rightarrow x_2
\end{array}$$

gebrochener Teil:

$$\begin{array}{rcll}
0,9 \cdot 16 = & 0.4 & +14 & \rightarrow x_{-1} \\
0,4 \cdot 16 = & \boxed{0.4} & +6 & \rightarrow x_{-2} \text{ (Periode, da gleicher „Nachkommarest“)}
\end{array}$$

$\curvearrowright x = (1B3, E\overline{6})_{16}$

Bsp. 7: Übergang anderer Systeme $\rightarrow$ Dezimalsystem
Entweder direkte Auswertung von (*) (v.a. beim Dualsystem $\rightarrow$ Addition von 2er-Potenzen) ODER Klammern in (**) von innen nach außen berechnen (zweckmäßig HORNER-Schema).

- ganzer Teil: beginnend mit x_p

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_p & & x_{p-1} & & \cdots & & x_0 \\
b & & \cdot b & b \cdot x_p & + & + & \cdot b & \ldots \cdot b \quad + \\
\hline
 & x_p & & b \cdot x_p + x_{p-1} & & \cdots & & \text{Ergebnis}
\end{array}$$

- gebrochener Teil: beginnend mit x_{-q}

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & x_{-q} & & x_{-(q-1)} & & \cdots & x_0 \\
b^{-1} & & \cdot b^{-1} & b \cdot x_{-q} & + & & + \cdot b^{-1} \text{ Ergebnis} \\
\hline
 & x_{-q} & & b \cdot x_{-q} + x_{-(q-1)} & & \cdots &
\end{array}$$

$x = (1E2, B8)_{16}$
ganzer Teil:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 14 & 2 \\
16 & & 16 & 480 \\
\hline
 & 1 & 30 & \boxed{482}
\end{array}$$

gebrochener Teil:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 8 & 11 & * \\
\frac{1}{16} = 0,0625 & & 0,5 & \boxed{0,71875} \\
\hline
 & 8 & 11,5 &
\end{array}$$

$\curvearrowright x = \underline{\underline{482,71875}}$

Bsp. 8: Hexadezimalsystem $\leftrightarrow$ Dualsystem
4 Dualziffern entsprechen einer Hexadezimalziffer ($2^4 = 16$) $\curvearrowright$ 4er Gruppen von Dualziffern ab Komma bilden.

a.) $(A8C,B2)_{16} = (1010\,1000\,1100,\ 1011\,1011\,001(0))_2$

b.) $((0)110\,1110,\ 101(0))_2 = (6E,A)_{16}$

1.3.3.2 ZAHLENDARSTELLUNG IM COMPUTER

(1) Ganze Binärzahlen in Zweierkomplementdarstellung (n Bit, meist $n = 8, 16, 32, 64$)

- Bsp.: $n = 8$ $\quad (100)_{10} = (64)_{16}$

0	1	1	0	0	1	0	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

  MSB: most siginficant bit
  (LSB: least significant bit)

- Um auch negative Zahlen darstellen zu können, wird das MSB als Vorzeichen reserviert. Negative Zahlen $-a$ $(1 \leq a \leq 2^{n-1})$ werden im sogenannten Zweierkomplement $\overline{a} := 2^n - a$ dargestellt ($\curvearrowright \overline{a} \geq 2^{n-1} \curvearrowright MSB = 1$)
- Nightnegtavie Zahlen $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$ werden unverändert dargestellt ($MSB = 0$)
- Damit Darstellung ganzer Zahlen von -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$ (Anzahl 2^n) möglich, $n = 8 :$ $-128 bis 127$.
- Umwandlung negativer Zahlen $\to$ Zweierkomplement

Bsp. 9: $\quad n = 8$, umzuwandeln sei -100 (dezimal)
zwei Möglichkeiten:

1.) (für die Handrechnung): $\overline{100} = \underbrace{2^8}_{=256} - 100 = \underbrace{156}_{(9C)_{16}} = \boxed{1 \mid 0\ 0\ 1 \mid 1\ 1\ 0\ 0}$

BEMERKUNG: Das Zweierkomplement der positiven Zahl 100 ist die positive Zahl $156 = \overline{100}$, diese wird wegen $MSB = 1$ als negative Zahl -100 interpretiert.

2.) (am schnellsten): Rechts (beim LSB) beginnend alle Ziffern bis einschließlich der ersten 1 übernehmen (unverändert lassen), für alle höherwertigen Ziffern Z das EINERKOMPLEMENT $1 - z$ bilden:

$(100)_{10} = \boxed{0 \mid 1\ 1\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0}$

$\boxed{1 \mid 0\ 0\ 1 \mid 1\ 1\ 0\ 0} = (\overline{100})_{10} = (156)_2$

Rückumwandlung (Zahl mit $MSB = 1 \to$ neg. Zahl) analog:
$\overline{156} = 256 - 156 = 100 \to \underline{\underline{-100}}$
Die Subtraktion wird damit auf die Addition des Zweierkomplements zurückgeführt.

Bsp. 10: $\quad a = 64 - 100 = 64 + (-100)$

$$
\begin{aligned}
64 = 2^6 &= 0100\,0000 \\
-100 &= 1001\,1100 \quad + \\
Summe &= 1101\,1100 \quad \text{Ergebins negativ} \\
36 &= 0010\,0100 \quad \text{dargestellst ist aber } \overline{z} = 2^n - z
\end{aligned}
$$

$\curvearrowright$ Ergebnis: $a = -36 = -z$
Ein ÜBERLAUF (Ergebnis $\geq 2^{n-1}$ oder $< -2^{n-1}$) ensteht in folgenden Fällen ($\to$

		a	b	$a+b$	
ERROR!)	MSB	0	0	1	($MSB = 0$ erwartet!)
	MSB	1	1	0	($MSB = 1$ erwartet!)

Bemerkung: Für die Handrechnung (z.B. $2-5 =: a$) kleinere zahl von größerer Subtrahieren $a = -(5-2)$, dabei genügt es für n die Binärstellenzahl des Minuenden $(5)_{10} = (101)_2$ also $n = 3$ zu verwenden. Es wird dabei ausschließlich mit nichtnegativen Zahlen gerechnet $(0, 1, ..., 2^n - 1)$:

$(5-2)_{10} = ((5 + 2^n - 2) - 2^n)_{10} = (5 + \overline{2} - 2^n)_{10}$

$(2)_{10} = (010)_2 \curvearrowright \overline{2} = (110)_2$

$(5)_{10} = (101)_2$

$$\begin{array}{lll} 5: & 101 & \\ \overline{2}: & 110 & + \\ 1 & 011 & \end{array}$$

vordere Stelle 2^n ignorieren

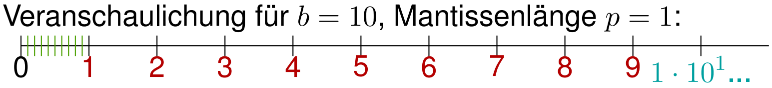
$\curvearrowright 5 - 3 = 3 = (011)_2 \curvearrowright \underline{\underline{a = -3}}$

(2) Gleitkommasysteme

$\boxed{x = v \cdot m \cdot b^e}$ dabei

- $v = (-1)^V$ ... VORZEICHEN $\begin{cases} V = 0 & \text{positive Zahl} \\ V = 1 & \text{negative Zahl} \end{cases}$
- m ... MANTISSE, Stellenzahl p, die Mantisse heißt NORMALISIERT falls sie folgende Gestalt besitzt:
  $m_1, m_2, ..., m_p$ oder $0, m_1, m_2, ..., m_p$ mit $m \neq 0$. Dabei sind $m_1, m_2, ..., m_p$ die Ziffern zur Basis b.
- e ... EXPONENT, ganzzahlig $e_{min} \leq e \leq e_{max}$.

In jedem Gleitkommasystem sind nur endlich viele Zahlen darstellbar, die Menge der reellen zahlen ist aber überabzählbar (unendlich).
Gleitkommazahlen liegen auf der Zahlengeraden diskret verteilt (fester Exponent $\curvearrowright$ gleiche Abstände, wächst Exponent um k, so wachsen die Abstände auf b^k-fache!)
Veranschaulichung für $b = 10$, Mantissenlänge $p = 1$:



EXPONENT 0: $1 \cdot 10^0, 2 \cdot 10^0, ..., 9 \cdot 10^0$
EXPONENT -1: $1 \cdot 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, ..., 9 \cdot 10^{-1}$
EXPONENT 1: $1 \cdot 10^1, 2 \cdot 10^1, ..., 9 \cdot 10^1$
RUNDUNG: Zahlen, die nicht in diesem „Raster" enthalten sind, werden auf dei nächstgelegene darstellbare Gleitkommazahl gerundet. Falls die Zahl genau in der Mitte zwischen zwei darstellbaren Zahlen liegt, wird auf die gerade Zahl gerundet (Bsp. $3,75 \to 3,8$ oder $4,65 \to 4,6$ bei Rundung auf eine Stelle nach dem Komma).

Numerische Probleme beim Rechnen mit Gleitkommazahlen

- Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten im allgemeinen nicht mehr. Ursachen sind bspw. Ziffernauslöschung bei der Subtraktion fast gleicher Zahlen, Addition oder Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung.

Bsp. 11:

1.) Man berechne $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ in einem System mit 3-Stelliger Mantisse: $a = 3,73 \cdot 10^6$, $b = -3,71 \cdot 10^6$ und $c = 6,42 \cdot 10^3$

- $a + b = 0,02 \cdot 10^6 = 2,00 \cdot 10^4$ (Normalisierung)
  $c = 0,642 \cdot 10^4 = 0,64 \cdot 10^4$ (Exponentenangleichung und Rundung)
  $(a + b) + c = 2,64 \cdot 10^4 = \underline{\underline{26400}}$
- $c = 0,00642 \cdot 10^6 = 0,01 \cdot 10^6$ (Exponentenangleichung und Rundung)
  $b + c = -3,,70 \cdot 10^6$
  $a + (b + c) = 0,03 \cdot 10^6 = 3,00 \cdot 10^4 = \underline{\underline{30000}}$
- exakter Wert: $a + b + c = \underline{\underline{26420}}$

2.) Aufgabe der numerischen Mathematik ist es, die unvermeidlichen Genauigkeitsverluste beim Rechnen mit Maschinenzahlen durch optimale Organisation (Reihenfolge) der Rechnung und Fehleranalyse in Grenzen zu halten.

(3) Gleitkommaformat IEEE 754 (single precision, 32 Bit)
$x = v \cdot m \cdot b^e = (-1)^V \cdot 1, m_2\, m_3 ... m_2 4 \cdot 2^{E-B}$ ($b = 2$, Binärsystenm)

- Vorzeichen $V = 0 \curvearrowright$ positiv, $V = 1 \curvearrowright$ negativ (1 Bit)
- Mantisse m_1 im Binärsystem stets gleich 1.
  $\curvearrowright$ nur Abspeicherung von $\boxed{M = m_2\, m_3 ... m_2 4}$ (23 Bit)
- Exponent: Abgespeichert wird $\boxed{E := e + B}$
  mit dem sogenannten BIASWERT $B = 127$ (Bias = Verzerrung) als nichtnegative 8-stellige Binärzahl, $e_{min} = -126$ ($E = 1$), $e_{max} = 127$ ($E = 254 = (1111\ 1110)_2$), die Grenzfälle $E = (0000\ 0000)_2$ und $E = (1111\ 1111)_2$ sind für Sonderfälle (0, ∞, nichtdefinierte Werte) vorgesehen.

Abspeicherung in der Reihenfolge $\boxed{VEM}$ (32 Bit)

Bsp. 12: Umwandlung einer Dezimalzahl in das IEEE 754-Format (32-Bit), $x = 435,9$ (vgl. Bsp. 6)

1.) Konvertierung in Dualzahl (unter Verwendung von Bsp. 6/Hexadez.)
$x = 1B3, E\overline{6})_{16} = (1\ 1011\ 0011, 1100\ 0110\ 0110...)_2$

2.) Normalisierte Gleitkommadarstellung, Mantisse mit 23 Stellen nach dem Komma, Kommaverschiebung um 8 Stellen.
$\curvearrowright x = 1, \underbrace{1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}_{M}(0\ 0110...))_2 \cdot 2^8$ (Abrundung!)

3.) Exponent $e = 8 \curvearrowright E = e + B = 8 + 127 = 135 = \underbrace{(1000\ 0111)_2}_{E}$

4.) Vorzeichenbit $V = 0$ (da x positiv)

$\curvearrowright x:$ $\boxed{0\ 1000\ 0111\ 1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}$

Bsp. 13: IEEE 754$\rightarrow$ Dezimalzahl
$\boxed{1\ 1000\ 0011\ 0111\ 1100\ 0000\ 0000\ 0000\ 000}$

1.) $E = (1000\ 00111)_2 = 131 \curvearrowright e = E - B = 131 - 127 = \underline{\underline{4}}$

2.) $V = 1 \curvearrowright$ negativ, normalisierte Mantisse $1, M$
$\curvearrowright x = -(1, 011111)_2 \cdot 2^4 = -(10111, 11)_2$
$\curvearrowright x = -23,75$

Bemerkung:

1.) Neben dem single-Format gibt es in IEEE 754 das double-Format (54 Bit, V=1Bit, E=11Bit, M=52 Bit, B=1023) sowie das erweiterbare Format

2.) Zahlbereiche single: $1,401 \cdot 10^{-45}...3,403 \cdot 10^{38}$, double: $4,941 \cdot 10^{-324}...1,798 \cdot 10^{308}$

1.3.3.3 ORDNUNGSSTRUKTUR

- Durch $\leqq$ (auch $\leq$) ist auf $\mathbb{R}$ eine vollständige Ordnungsrelation erklärt.
- Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$):

  (1) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leqq y + z$

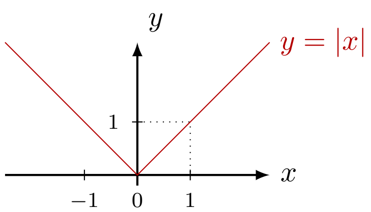
  (2) $(x \leq y) \wedge (z \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$
  $(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \geq y \cdot z$

  Für die strikte Ordnung $<$ gilt:

  $\boxed{(x < y) \wedge (z < 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot > y \cdot z}$

Def. 8:

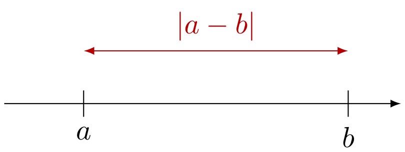
Sei x eine reele Zahl. Dann heißt $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ der (absolute) Betrag von x.



Vorzeichenfunktion $sgn(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Diskussion: Es gilt:

(1) $|a - b|$ = „Abstand der Zahlen a und b auf der Zahlengeraden“



(speziell: $|a|$ = „Abstand von a zum Ursprung“)

(2) $a = |a| \cdot sgn(a)$

(3) $|a| = |-a|, |ab| = |a| \cdot |b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (falls $b \neq 0$)

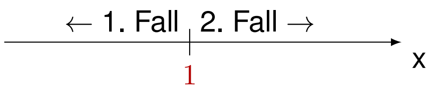
(4) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (DREIECKSUNGLEICHUNG) für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Lösung von Ungleichung

Bsp. 14: (Ungleichung mit Beträgen)

Gesucht sei die Lösungmenge L der reellen Zahlen, die die Ungleichung $|x-1| < 3 + \frac{1}{2}x$ (*) erfüllen.

- kritische Stelle(n): Nullstellen des Terms innerhalb der Betragsstriche d.h. $x = 1 \curvearrowright$ Fallunterscheidung



- 1. Fall: $x - 1 < 0$ d.h. $x < 1$
  in (*):
  $-(x-1) < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $-\frac{3}{2}x < 2 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x > -\frac{4}{3}}}$
  $\curvearrowright L_1 = \left\{x|(x<1) \wedge x > \frac{4}{3}\right\} = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$

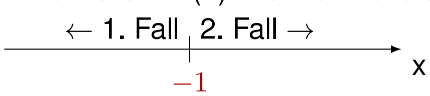
- 2. Fall $x - 1 \geq 0$ d.h. $x \geq 1$
  in (*):
  $x - 1 < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $\frac{1}{2}x < 4 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x < 8}}$
  $\curvearrowright L_2 = \{x|(x \geq 1) \wedge (x < 8)\} = [1, 8)$

- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{\left(-\frac{4}{3}, 8\right)}}$

Bsp. 15: (Ungleichung mit gebrochen rationalen Termen)

$\frac{x}{x+1} < 1$ (*)

- kritische Stelle(n): Nenner-Nullstellen, hier: $x = -1$.



- 1. Fall: $x < -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x > x + 1 \Leftrightarrow 0 > 1$ (Widerspruch)
  $L_1 = \varnothing$.

- 2. Fall: $x > -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x < x + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ (wahre Aussage)
  $L_2 = \{x|x > -1\} = (-1, \infty)$

- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{(-1, \infty)}}$

Bsp. 16: (quadratische Ungleichungen)

$x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow$

$\left(x + \frac{3}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} < 10 \Leftrightarrow$ (vereinfacht durch quadratische Ergännzung)

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4} \Leftrightarrow$

$\left|x + \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$ (Äquivalenz siehe Übung)

$\frac{-7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$-5 < x < 2$

$L = \underline{\underline{(-5, 2)}}$

Bemerkung:
In vielen Fällen ist auch ein graphischer Lösungsansatz möglich. Dabei sind geeignete Schnittpunkte ($\widehat{=}$Gleichung) exakt rechnerisch zu ermitteln, ausschließend Ungleichheitszeichen betrachten.

in Bsp. 16:

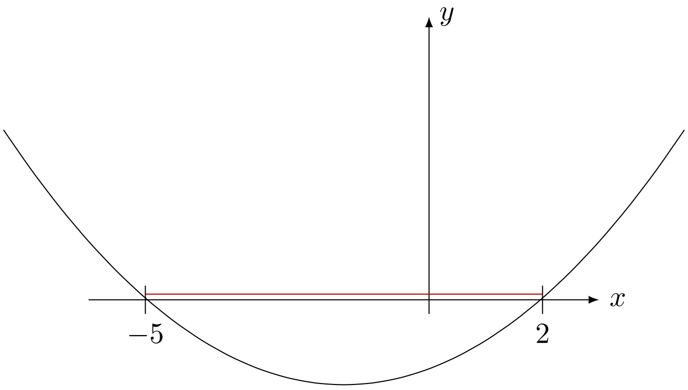
$x^2 + 3x < 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{x_2 + 3x - 10}_{=f(x)} < 0$

Nullstellen von $f(x)$:

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

$\curvearrowright$ Grobskizze von $y = f(x)$ (Parabel, nach oben geöffnet)



$\curvearrowright L = (-5, 2)$

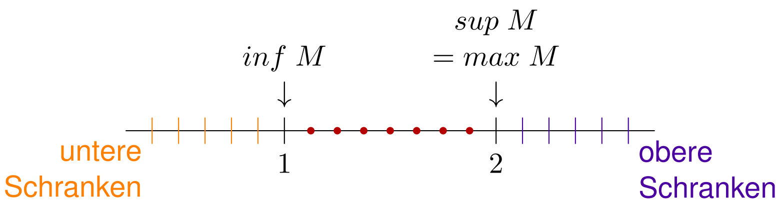
Schranken und Grenzen

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, vgl. 1.2. Man kann zeigen, dass es bei diesen Ordnungsrelationen ($\leq$) auf $\mathbb{R}$ dann auch eine kleinste obere Schranke (SUPREMUM, $sup\ M$, $s = max\ M$ falls $s \in M$)
- Analog: nach UNTEN BESCHRÄNKT, INFIMUM, MINIMUM.
- Falls M NICHT nach oben beschränkt ist, d.h. es gilt:
  $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M \quad x \leq a = \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in M \quad x > a$, dann Schreibweise $\boxed{sup\ M := \infty}$
- Analog: in $\boxed{inf\ M := -\infty}$ falls M NICHT nach unten beschränkt.
- M heißt BESCHRÄNKT, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Bsp. 17:

$M = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- OBERE SCHRANKEN: π, 2300, 7, $2,01$ usw.
  kleinste obere Schranke: $sup\ M = 2 = max\ M$
- UNTERE SCHRANKEN: -31, 0, $0,99$ usw.
  größte untere Schranke: $inf\ M = 1$ ($1 \notin M \curvearrowright min\ M$ existiert nicht)



1.3.4 KOMPLEXE ZAHLEN

Motivation: z.B. $\boxed{x^2 + 1 = 0}$ ($\Leftrightarrow x^2 = -1$) im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar. $\curvearrowright$ Zahlenbereichserweiterung

1.3.4.1 BEGRIFF, RECHENREGELN

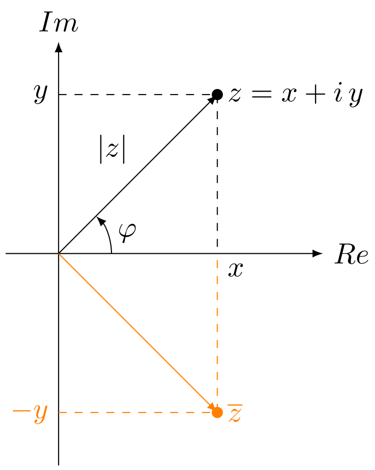
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathbb{C}$ enthält eine Zahl i mit $\boxed{i^2 = -1}$ (oft auch mit j bezeichnet)

(2) Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form $\boxed{z = x + i \cdot y}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ darstellen.
Dabei $x = Re(z)$ (Realteil) und $y = Im(z)$ (Imaginärteil)

(3) Auf $\mathbb{C}$ werden die Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) wie folgt erklärt:
Sei $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ Dann gilt:
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Die Menge $\mathbb{C}$ wird mit diesen Operationen zum KÖRPER DER KOMPLEXEN ZAHLEN. Die arithmetischen Operationen erfolgen unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Reellen.

(4) Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine natürliche Ordnungsrelation.
Veranschaulichung: GAUSSSCHE ZAHLENEBENE
Zahl $z \leftrightarrow$ Punkt $(x, y) \leftrightarrow$ Vektor $\overrightarrow{OP}$



- Betrag von z:
  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Hauptarrgument von z: orientierter Winkel zwischen positiver x-Achse und $\overrightarrow{OP}$ (gemessen auf kürzestem Wege)
  $Arg(z) := \varphi \qquad (-\pi < \varphi \leq \pi)$
- zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$:
  $\overline{z} := x - i \cdot y$

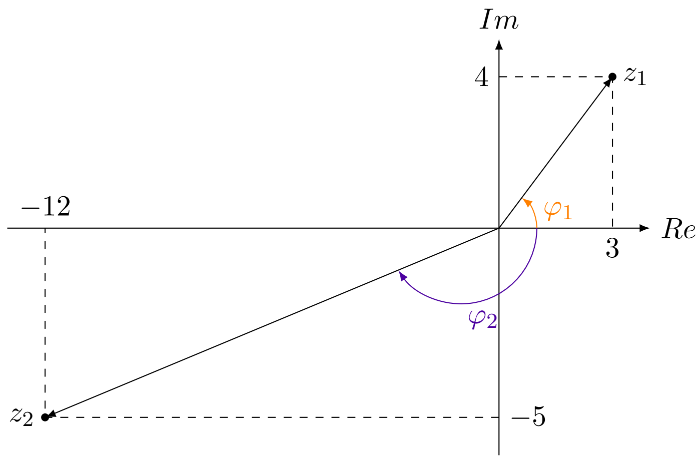
Diskussion:

- Falls nicht notwendig kürzester Weg gewählt wird: Argument $arg(z) = Arg(z) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$
  z.B. $z = 1 - i \quad : \quad Arg(z) = -45° = -\frac{\pi}{4}$, ein (Neben-)argument bspw. $arg(z) = 315°$
- Berechnung von $Arg(z)$ $(z \neq 0)$: $cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

$$\boxed{Arg(z) = \begin{cases} +arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \leq 0 \\ -arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}}$$

Bsp. 18:

$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$

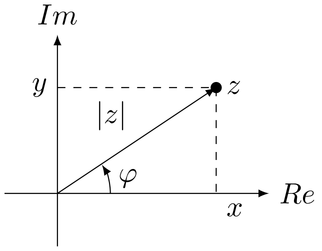


a.) Betrag und Hauptargument
$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\varphi_1 = Arg(z_1) = arccos\frac{3}{5} \approx 53,13°$
$|z_2| = 13$
$\varphi_2 = Arg(z_2) = -arccos - \frac{12}{13} \approx -157,38°$

b.) Arithmetische Operationen:
$z_1 + z_2 = -9 - i$
$z_1 - z_2 = 15 + 9i$
$z_1 \cdot z_2 = -16 - 63i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = -\frac{56}{169} - \frac{33}{169}i$

1.3.4.2 DARSTELLUNGSFORMEN KOMPLEXER ZAHLEN

- Trigonometrische Darstellung
- EULERsche Form
- exponentielle Darstellung



$\boxed{z = x + iy}$ (ARITHMETISCHE DARSTELLUNG)
$x = |z| \cdot cos\varphi$
$y = |z| \cdot sin\varphi$
$\curvearrowright \boxed{z = |z| \cdot (cos\varphi + i\ sin\varphi)}$ (TRIGONOMETRISCHE DARSTELLUNG)
(und $\varphi = arg\ z$, meist $\varphi = Arg\ z$)

Diskussion:

$z_1 = |z_1| \cdot (cos\varphi_1 + i\ sin\varphi_1)$
$z_2 = |z_2| \cdot (cos\varphi_2 + i\ sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\underbrace{cos\varphi_1\ cos\varphi_2 - sin\varphi_1\ sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\ \underbrace{(sin\varphi_1\ cos\varphi_2 + sin\varphi_2\ cos\varphi_1)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)})$$

$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$

Folgerung:

$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$

$\boxed{arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)}$

Analog:

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)}$$

$$\boxed{arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)}$$

Es ist also sinnvoll zu definieren:

Def. 10:

$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + i\ sin\varphi}$ (EULERSCHE FORM)

Diskussion:

(1) EXPONENTIELLE DARSTELLUNG von z: $\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$

(2) Wegen der obigen Formeln bleiben für diese Darstellung die vom Reellen bekannnten Potenzgesetze gültig.
Insbesondere gilt die Formel von MOIVRE:
$\boxed{z^n = \left(|z| \cdot e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n \cdot e^{i\varphi n} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\ \sin(n\varphi))}$

Bsp. 19:

a.) $z_1 = \underbrace{3+4i}_{arithmetisch} = \underbrace{5 \cdot (cos 53,13° + i \ \sin(53,13°)}_{trigonometrisch} = \underbrace{5 \cdot e^{i \cdot 53,13°}}_{exponentiell}$

$z_2 = -12 - 5i = 13 \cdot (\cos(-157,38° + i \ -157,38°)) = 13 \cdot e^{-i \cdot 157,38°}$

b.) $z = -1 + i$, gesucht: z^{12}

$|z| = \sqrt{2}$, $Arg(z) = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135° = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3}{4}\pi} \Rightarrow z^12 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = 2^6 \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi \cdot 12} = 64 \cdot e^{i \cdot 9\pi} = 64 \cdot e^{i\pi}$

arithmetische Darstellung: $z^{12} = 64 \cdot (cos\pi + i \ sin\pi) = \underline{\underline{-64}}$

1.3.4.3 SPEZIELLE GLEICHUNGEN

Quadratische Gleichung: $z^2 + p \cdot z + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$

quadratische Ergänzung: $\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$

1. Fall: $\frac{p}{2} - q \geq 0 \curvearrowright z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

2. Fall: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \overbrace{\underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{>0}}^{\widehat{=} a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(z + \frac{p}{2}\right) + i \cdot a\right) \cdot \left(\left(p + \frac{p}{2}\right) - i \cdot a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

praktisches Vorgehen:

Lösungsformel aus dem ersten Fall stets anwenden, im Fall 2 Formal $\sqrt{-1} = \pm i$.

Bsp. 20:

$z^2 + 28z + 200 = 0$

$z_{1,2} = -14 \pm \sqrt{-4} = \underline{\underline{-14 \pm 2i}}$

Kreisteilungsgleichung:

$\boxed{z^n = b}, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$

Lösung:

- b exponentiell darstellen: $b = |b| \cdot e^{i\beta} \quad , \beta = Arg(b)$
- Gleichung besitzt n Lösungen $\boxed{z_k = \sqrt[n]{|b|} \cdot e^{i\frac{\beta + k \cdot 360°}{n}}}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$

zum Beweis:

Ansatz: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n} = |b| \cdot e^{i\beta}$

Zwei Gleichungen stimmen überein, wenn jeweils der Betrag gleich und Winkel bis auf ein vielfaches von π gleich ist.

(1) $r^n = |b| \curvearrowright r = \sqrt[n]{|b|}$

(2) $\varphi \cdot n = \beta + k \cdot 360°$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

$\curvearrowright \varphi = \dfrac{\beta + k \cdot 360°}{n}$ $\quad$ (nur n verschiedene Argumente)

Beispiele:

a.) $z^3 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

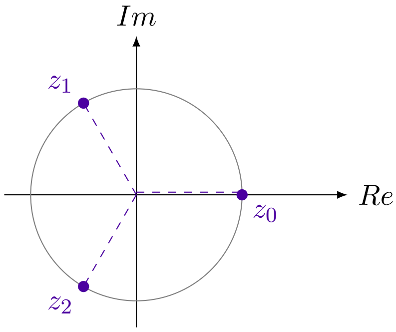
$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i \frac{0 + k \cdot 2\pi}{3}} \qquad (k = 0, 1, 2)$

$z_0 = e^{i \cdot 0} = \underline{\underline{1}}$

$z_1 = e^{\frac{2}{3}\pi} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\ \sin(\frac{2}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$

$z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + i\ \sin(\frac{4}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$

Allgemein: Lösungen der Gleichung $z^n = b$ teilen Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|b|}$ um 0 in n gleiche Teile.



b.) $z^4 = -16 = 16 \cdot e^{i \cdot \pi}$

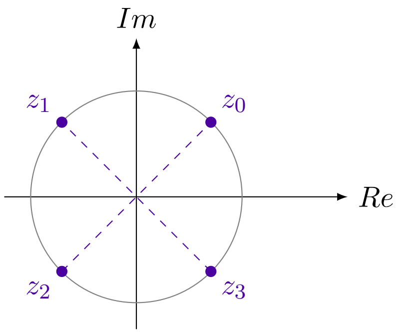
$z_k = 2 \cdot e^{i \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{4}} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$

$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$

$z_3 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$



Anwendung:
Faktorisierung des Polynoms $p(x) = x^4 + 16$

$$
\begin{aligned}
x^4 + 16 &= (x - z_0) \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) \\
&= (x - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x - \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\
&= (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)
\end{aligned}
$$

1.3.4.4 ANWENDUNG IM WECHSELSTROMKREIS

(1) Spule:
Stromstärke $I = I_m \cdot (\cos(\omega t) + i\ \sin(\omega t))$

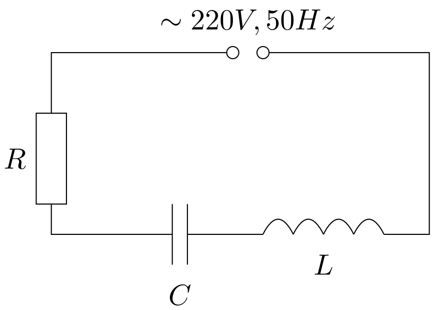
Spannung $U = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot (\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$
(formale Ergänzung zu komplexer Größe)
$\curvearrowright I = I_m \cdot e^{i\omega t}$, $U = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \underbrace{I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i\omega t}}_{I \cdot \omega \cdot L} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i}$

$R = \frac{U}{I} \curvearrowright \boxed{R_L = \omega \cdot L \cdot i}$ (INDUKTIVER WIDERSTAND)

(2) Kondensator:
$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot i}}$ (KAPAZITIVER WIDERSTAND)

Bezeichnung in E-Technik:
$Z := R_ges = R + i \cdot X$
Wirkwiderstand R, Blindwiderstand X, Scheinwiderstand $|Z|$, Leitwert $Y = \frac{1}{Z}$

Bsp. 22:



$R = 100\Omega, C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6}\frac{As}{V}, L = 1H = 1\frac{Vs}{A}, \omega = 2\pi \cdot \underbrace{50\frac{1}{s}}_{f}$

Gesucht ist der Gesamtwiderstand Z.
$Z = R + R_C + R_L = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$
$Z = (100 + 155,04i)\Omega = 184,44 \cdot e^{i \cdot 57,17°}\Omega$
$\curvearrowright$
Wirkwiderstand: $Re(Z) = 100\Omega$
Blindwiderstand: $Im(Z) = 155,04\Omega$
Scheinwiderstand: $|Z| = 184,44\Omega$
Phasenverschiebung: $Arg(Z) = 57,17°$

1.4 REELLWERTIGE FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

1.4.1 ELEMENTARE FUNKTIONEN (TEIL 1)

1.4.1.1 POLYNOME

Def. 1:
$y = f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ mit $(a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ heißt ganze rationale Funktion oder POLYNOM vom Grad n (falls $a_n \neq 0$).
Zur Beschreibung der Funktionswerte zweckmäßig: HORNER-Schema
(vgl. Stellenwertsysteme 1.3.3.1)

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
x_0		$b_{n-1}\cdot x_0$	$b_{n-2}\cdot x_0$	...	$b_1\cdot x_0$	$b_0\cdot x_0$
	$\underbrace{\boxed{b_{n-1}}}_{=a_n}$	$\boxed{b_{n-2}}$	$\boxed{b_{n-3}}$	...	$\boxed{b_0}$	$f(x_0)=r_0$

Polynomdivision: $\dfrac{f(x)}{x-x_0} = b_{n-1}\,x^{n-1} + b_{n-2}\,x^{n-2} + ... + b_1\,x + b_0 + \dfrac{r_0}{x-x_0}$

Bsp. 1:

$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 6, \quad x_0 = 3,$ ges: $f(x_0), \quad \dfrac{f(x)}{x-x_0}$

	1	0	-2	1	0	-6
$x_0 = 3$		3	9	21	66	198
	1	3	7	22	66	192

$f(x) : (x-3) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 22x + 66 + \dfrac{192}{x-3}$

Satz 1:

Es sei $f(x) = p_n(x) = a_n\,x^n + ... + a_0$ ein Polynom vom Grad n (d.h. $a_n \neq 0$). Dann besitzt f (in $\mathbb{C}$) genau n Nullstellen $x_1, ..., x_n$ und es gilt: $f(x) = a_n(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_n)$. (Zerlegung in Linearfaktoren)

Diskussion:

(1) Falls in der Linearfaktorzerlegung der Faktor $(x-x_0)$ genau k-mal ($1 \geq k \geq n$) vorkommt, so heißt x_0 k-FACHE NULLSTELLE (Nullstelle der Vielfachheit k).

(2) Nichtreelle Nullstellen sind möglich, sie treten stets paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auf $(x_0, \overline{x_0})$). In diesem Falle Zusammenfassung der Linearfaktoren zu reellen quadratischen Faktoren möglich: $(x-x_0)\cdot(x-\overline{x_0}) = x^2 - (x_0+\overline{x_0})x + x_0\cdot\overline{x_0} = x^2 - 2\cdot Re(x_0)\cdot x + |x_0|^2$

(3) Falls $a_0, a_1, ..., a_n$ ganze Zahlen sind, dann sind ganzzahlige Nullstellen Teiler von a_0 (falls vorhanden).

(4) Allgemeine Methoden zur Nullstellenbestimmung später (Kap. 3 1.3.1)

Bsp. 2:

$p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6,$ ges: Nullstellen

Durch Probieren $\boxed{x_1 = 2}$

mit HORNER-Schema:

	1	1	-5	1	-6	
$x_1 = 2$		2	6	2	6	
	1	3	1	3	$\boxed{0}$	$\curvearrowright p(x) = (x-2)\cdot\underbrace{(x^3+3x^2+x+3)}_{\text{durch Probieren } x_2=-3}$
$x_2 = -3$		-3	0	-3		
	1	0	1	$\boxed{0}$		$\curvearrowright p(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{(x^2+1)}_{x_{3,4}=\pm i}$

$\curvearrowright$ Zerlegung: $p(x) = (x-2)(x+3)(x-i)(x+i)$

1.4.1.2 GEBROCHEN RATIONALE FUNKTIONEN

Def. 2:
$y = f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_m\ x^m + a_{m-1}\ x^{m-1} + ... + a_1\ x + a_0}{b_n\ x^n + b_{n-1}\ x^{n-1} + ... + b_1\ x + b_0}$ mit $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ und $Db(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$ heißt gebrochenrationale Funktion. f heißt ECHT GEBROCHEN, falls $m < n$ und UNECHTGEBROCHEN, falls $m \geq n$.

Diskussion:

- Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen besitzen (ansonsten: Kürzen gemeinsamer Linearfaktoren von Zähler und Nenner [unter Beachtung des Definitionsbereichs])
- Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen POLSTELLEN der gebrochen rationalen Funktion (bei Polstelle x_P: $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_P$).
- Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind die Nullstellen von f.
- Verhalten von $f(x)$ bei k-facher reeller Nullstelle oder Polstelle:
  $\boxed{\text{Vorzeichenwechsel} \Leftrightarrow k \text{ ungerade}}$
- Polynomdivision $p(x) : q(x) = \underbrace{s(x)}_{Polynom} + \underbrace{\dfrac{r(x)}{q(x)}}_{echtgebrochen}$
  $y = a(x)$ ist die sogenannte Asymptote

Bsp. 3:
$y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x^2(x+2)}{(x+1)(x-2)} = x + 3 + \dfrac{5x+6}{x^2 - x - 2}$
Daraus lassen sich leicht erste Werte der Kurvendiskussion ableiten:

- Nullstellen: $x_{1,2} = 0$ (doppelt)$, x_3 = -2$
- Polstellen: $x = -1,\ x = 2$ (einfach $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel)
- Asymptote: $y = x + 3$
  Schnittstellen und Asymptoten: $5x + 6 = 0 \curvearrowright x = -1, 2$

1.4.1.3 TRIGONOMETRISCHE FUNKTION

Übliche Definition der trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen wie $\sin()\cos()$ usw.):

Def. 3:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x) = f(+p)$ (für alle $x \in Db(f)$). Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt Periode f.

Def. 4: (Symmetrieeigenschaft)
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt:

(1) gerade (symmetrische zur y-Achse), wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in Db(f)$ gilt.

(2) ungerade (punktsymmetrisch zum Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in Db(f)$ gilt.

Diskussion:

Einige Funktionen

Funktion	Db	Periode	Symmetrie
$\sin x$	$\mathbb{R}$	2π	ungerade
$\cos x$	$\mathbb{R}$	2π	gerade
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\right\}$	π	ungerade
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade

Einige wichtige Formeln:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

1.4.1.4 EXPONENTIALFUNKTION

$y = f(x) = a \; (a > 0, x \in \mathbb{R})$

- Wichtig: Potenzgesetze, z.B. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ usw.
- Besondere Bedeutung besitzt die Funktion $y = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$ mit $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2,7182...$

1.4.1.5 HYPERBELFUNKTION

Def. 5: Hyperbolicus

- $y = \cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \coth x := \dfrac{1}{\tanh x} \quad (x \neq 0)$

Wichtig: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
Fourier: $y = \cosh x$ ist gerade, alle anderen Hyperbelfunktionen ungerade.

1.4.2 UMKEHRFUNKTIONEN

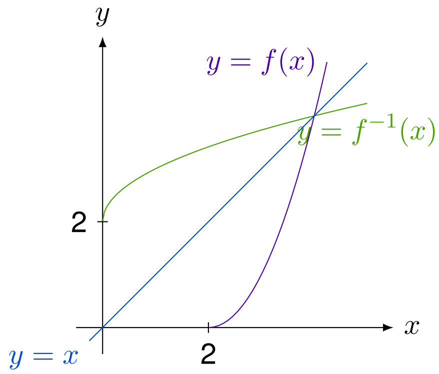
- Zur Erinnerung: $y = f(x), x \in Db(f)$ heißt injektiv (umkehrbar eindeutig), wenn es zu jedem Bild $y \in Wb(f)$ genau ein Urbild $x \in Db(f)$ mit $y = f(x)$ gibt. D.h.:
  $\underbrace{y}_{\in Wb(f)} \to \underbrace{x}_{\in Db(f)} =: f^{-1}(y)$
  Die dadurch erklärte Funktion f^{-1} („f oben -1“) ist die Umkehrfunktion von f.
  Es gilt: $\boxed{Db\left(f^{-1}\right) = Wb(f)}$, $Wb\left(f^{-1}\right) = Db(f)$

- Bilden der Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, $x \in Db(f)$:
  (1) Auflösen der Funktionsgleichung nach x: $x =: f^{-1}(y)$ (falls dies eindeutig möglich ist, andernfalls existiert f^{-1} nicht!)
  (2) Oft erfolgt anschließend eine Vertauschung von x und y:
  $y = f^{-1}(x)$, $x \in Db(f^{-1}) = Wb(f)$.
  Vertauschung entspricht geometrisch Spiegelung an der Geraden $x = y$, vgl. Bsp. 4.

Bsp. 4:
$y = f(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad , x \in [0, \infty)$

(1) Auflösen nach x: $y - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y-2)^2 = f^{-1}(y)$

(2) Vertauschen von x und y: $y = f^{-1}(x) = (x-2)^2, Db(f^{-1}) = Wb(f) = [2, \infty)$



! $Db(f^{-1})$ nur $[2, \infty)$, obwohl $(x-2)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Def. 6:
Die reellwertige Fkt. $y = f(x)$ heißt

a.) STRENG MONOTON WACHSEND, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ gilt.

b.) MONOTON WACHSEND (=nicht fallend), falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt für alle $x_1, x_2 \in Db(f)$.

c.) Analog: STRENG MONOTON FALLEND bzw MONOTON FALLEND (=nicht wachsend).

Satz 2:
f streng monoton $\Rightarrow$ f ist injektiv (d.h. f^{-1} existiert)

1.4.3 ELEMENTARE FUNKTIONEN (TEIL 2)

1.4.3.1 WURZEL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Def. 7:
$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad (x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}^*)$ ist die Umkehrfunktion zu $y = x^n \quad (x \in [0, \infty))$

Diskussion:

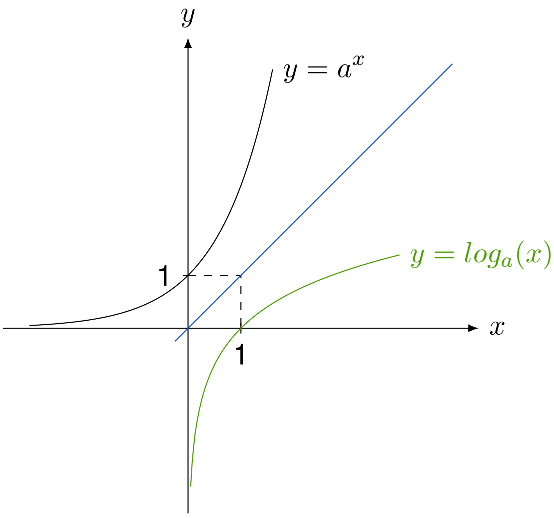
(1) Im Bereich der reellen Zahlen ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ erklärt, der Funktionswert ist selber nicht negativ.

(2) Lässt man in $x^{\frac{1}{3}}$ negative x zu (etwa $\sqrt[3]{-8} = -2$), so ergeben sich Widersprüche:
z.B.: $\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow -2 = -8^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$

(3) Es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Def. 8:
$y = log_a(x) \quad (a > 0 \wedge a \neq 1, x \in (0, \infty))$ ist Umkehrfunktion zu $y = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$.
Speziell:

- $lg(x) := log_{10}(x)$
- $ln(x) := log_e(x)$



Diskussion:

(1) Log-Gesetze:

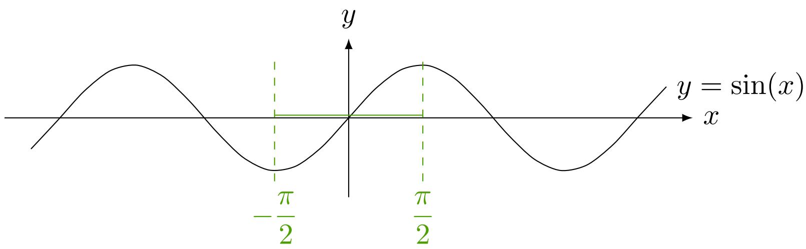
$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$$
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$
$$log_a(x^\alpha) = \alpha \; log_a x$$
$$log_c b = \frac{log_a b}{log_a c}$$

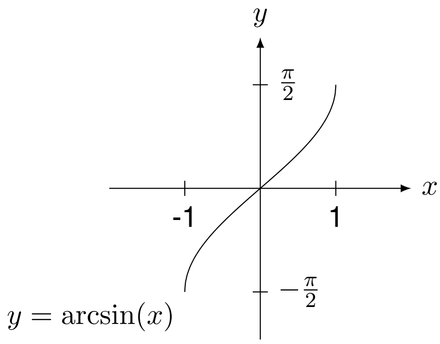
(2) Es gilt $x = a^{log_a x} \qquad (f(f^{-1}(x)) = x \forall y \in Db(f^{-1}))$

(3) Ferner gilt $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln\ a}$

1.4.3.2 ARCUSFUNKTIONEN

Vorbetrachtung: $y = f(x) = sin\ x (x \in \mathbb{R})$ ist nicht injektiv, also existiert keine Umkehrfunktion.
Aber: $y = \sin(x)$, eingeschränkt auf z.B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist injektiv und damit umkehrbar.





Def. 9:
Umkehrfunktionen

	Db	Wb	Umkehrfunktion von ...	
$y = arcsin\ x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = sin\ x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$y = arccos\ x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$y = cos\ x$	$0 \leq x \leq \pi$
$y = arctan\ x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$y = tan\ x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$y = arccot\ x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$y = cot\ x$	$0 < x < \pi$

Bsp. 5:
Gesucht sind alle Lösungen der folgenden Gleichung: $tan(2x) = y$
Es sei $2x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, mit $k \in \mathbb{Z}$.
$y = tan(2x) = tan(2x - k \cdot \pi)$ mit $2x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow 2x - k\pi = arctan(y) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{arctan(y) + k\pi}{2}}}$

1.4.3.3 AREAFUNKTIONEN

Def. 10:
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

	Db	Wb	Umkehrfunktion von ...	
$y = \text{arcsinh}\ x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = \sinh\ x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \text{arccosh}\ x$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$y = cosh\ x$	$x \geq 0$
$y = \text{arctanh}\ x$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$y = tanh\ x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \text{arccoth}\ x$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = coth\ x$	$x \neq 0$

Aus der Def. der Hyberbelfunktionen (Def. 5) folgt:
$\text{arcsinh}\ x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\text{arctanh}\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$\text{arccosh}\ x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$
$\text{arccoth}\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1.5 LINEARE ALGEBRA

1.5.1 VEKTORRÄUME

Begriff:

(1) Gegeben seien ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente SKALARE heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ (V... Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$... Vektoraddition).

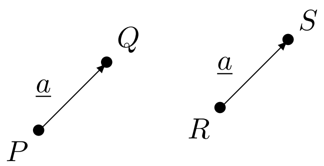
(2) Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in V die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x$ in V mit folgenden Eigenschaften zuordnet.

- Distributivgesetze:
  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$
  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- Assoziativgesetz:
  $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
- Neutrales Element:
  $1 \odot x = x$

(für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in V$)

Eine Menge V mit den in 1.) und 2.) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt VEKTORRAUM (VR) ÜBER K.
Bemerkung: Schreibweise meist $+$ anstelle von $\oplus$ und $\cdot$ anstelle von $odot$ (ergibt sich aus Zusammenhang der Elemente).

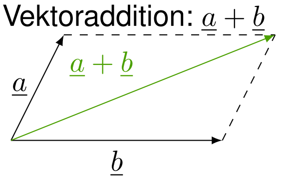
Bsp. 1:
Skalarbereich $\mathbb{R}$.
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translatimen).



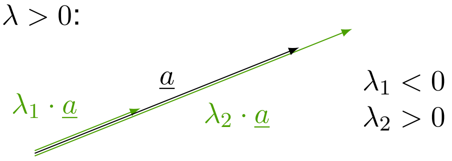
Pfeile als Repräsentanten eines Vektors $\underline{a}$.
Bezeichnung: $\underline{a} = \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Ortskurven: Angeheftet in gemeinsamen Anfangspunkt O (Ursprung).

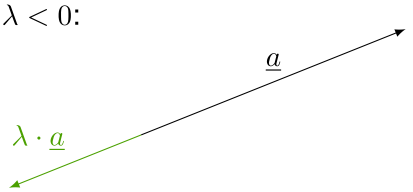
- Vektoraddition: $\underline{a} + \underline{b}$



- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \underline{a}$:
  $\lambda > 0$:

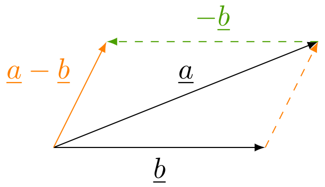


$\lambda < 0$:



Länge von $\lambda \cdot \underline{a}$ ist das $|\lambda|$-fache der Länge von $\underline{a}$.

- Subtraktion: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} + ((-1) \cdot \underline{b})$



- Nullvektor: $\underline{0}$ (Länge 0, keine Richtung)

Bsp. 2:

$$K = \mathbb{R}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

$\curvearrowright$ V Vektorraum über $\mathbb{R}$, Bezeichnung: $\mathbb{R}^n$, Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Def. 1:
Die Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ heißen LINEAR UNABHÄNGIG, wenn die Gleichung $\boxed{x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion:

(1) $x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n$ heißt LINEARKOMBINATION (LK) der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

(2) Falls es eine darstellung der Gestalt wie in Def. 1 gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ LINEAR UNABHÄNGIG.
In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Def. 2:
Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge ALLER LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1. $L(V_1)$ ist die sogenante LINEARE HÜLLE von V_1.

Bemerkung:
$L(V_1)$ ist selbst ein Vektorraum, nämlich der von V_1 aufgespannte Teilraum von V (kleinster VR, welcher V_1 enthält).

Def. 3:

- Ein Vektorraum V heißt N-DIMENSIONAL, wenn es n linear unabhängige Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen ($L(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n\}) = L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n) = V$).
- Die Menge der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion:
In einem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, stets gleich (Dimension des VR).

Satz 1:
Es sei $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ eine Basis des VRs V. Dann gibt es für JEDES $\underline{x} \in V$ eine EINDEUTIGE Darstellung der Gestalt $\underline{x} = x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$.

Bemerkung:

- Die Koeffizienten $x_1, ...x_n$ heißen KOORDINATEN von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.
- Die Summanden $x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$ heißen KOMPONENTEN von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

Bsp. 3:
Die Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\curvearrowright$ $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$ sind linear unabhängig. Ferner gilt für beliebiges $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + ... + x_n \cdot \underline{e}_n$.

Bsp. 4:
Zwei Vektoren $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ und $\underline{a}_2 \neq \underline{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

1.5.2 MATRIZEN

Def. 4:
Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt MATRIX VOM TYP (m, n).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \text{ (Zeilenindex)} \\ j=1,\dots,n \text{ (Spaltenindex)}}}$$

Def. 5 Rechenoperationen

(1) $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{B} = (b_{ij})$ seien vom gleichen Typ (m, n).
$\boxed{\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})}$ ADDITION VON MATRIZEN

(2) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (m, n).
$\boxed{\lambda \cdot \underline{A} = (\lambda \cdot a_{ij})}$ MULTIPLIKATION EINER MATRIX MIT EINEM SKALAR

(3) $\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ (m, n)
$\underline{B} = (b_{ij})$ sei vom Typ (n, p)
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge VERKETTET (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$).

$$\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}} \quad \text{MATRIZENMULTIPLIKATION}$$

Das Produkt ist also vom Typ (m, p).

Diskussion:
Zweckmäßig FALK-Schema zur Matrizenmultiplikation (vgl. folgendes Bsp. 5).

Def. 6
Die aus der (m, n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-Matrix heißt TRANSFORMIERTE von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^T$.

Bsp. 5:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a.) $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedliche Typen).

b.) $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c.) $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d.) $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ existiert nicht ($(2,3)$ und $(2,2)$ nicht verkettet)

f.) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 21 & 30 & 17 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(mit FALK-Schema:)
$$\begin{array}{cc|ccc} & & 3 & 6 & 4 \\ & & -2 & 0 & 1 \\ \hline 5 & -3 & 21 & 30 & 17 \\ 1 & 4 & -5 & 6 & 8 \end{array}$$

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!

Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

(1) Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.
Bsp: $V = \{$Matrizen vom Typ $(2,2)\}$
Basis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ (Assoziativgesetz)
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ (Distributivgesetze)
- $(\lambda \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \underline{B})$
- $(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \qquad \left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \qquad \boxed{(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B} \cdot \underline{A}^T}$

(3) Achtung: Im Allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$!

(4) FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{A} \cdot \underline{BC}$

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{B} & \underline{C} \\ \hline \underline{A} & \underline{A} \cdot \underline{B} & (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} \end{array}$$
oder
$$\begin{array}{c|c} & \underline{C} \\ \hline \underline{B} & \underline{B} \cdot \underline{C} \\ \underline{A} & \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \end{array}$$
(2 Varianten, gemäß Assoziativgesetz)

Spezielle Matrizen

(1) QUADRATISCHE MATRIZEN: Typ (n,n)
Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt

a) SYMMETRISCH, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt.

b) obere DREIECKSMATRIX, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
untere DREIECKSMATRIX, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

c) DIAGONALMATRIX, wenn $a_ij =$ für $i \neq j$.

d) EINHEITSMATRIX $\underline{E}$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ (spezielle Diagonalmatrix).

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(2) NULLMATRIX $\underline{0}$ (sämtliche Elemente 0, nicht notwendig quadratisch).

(3) Matrizen vom Typ $(n, 1)$ (n Zeilen, eine Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ (vgl. 1.5.1)}$$

Es ist $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ vom Typ $(1, n)$ (Zeilenvektor).

Diskussion:

(1) Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation von Matrizen einen (nicht kommutativen) Ring.

(2) Für quadratische Matrizen $\underline{A}$ sind Potenzen bildbar:

$$\boxed{\underline{A}^0 = \underline{E} \quad \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n-\text{Faktoren}}, n \in \mathbb{N}}$$

(3) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$
$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$
$\underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0}$
$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$
$\underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$
(analog 0 und 1 bei den reellen Zahlen)

(4) Sei $\underline{A}$ vom Typ (m, n), $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$.
Dann ist $\boxed{\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}}$ vom Typ $(m, 1)$.
Durch die Zuordnung $\underline{x} \longmapsto \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ wird eine LINEARE ABBILDUNG von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben (Fkt. f heißt linear, wenn gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in Db(f)$ gilt).

1.5.3 DETERMINANTEN

Def. 7:
Jeder n-reihigen quadratischen Matrix ist eindeutig eine Zahl $det\ \underline{A}$, die sogenannte DETERMINANTE von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet.
$n = 1$: $det\,((a_{11})) := a_{11}$

$$n \geq 2: det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\right) := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} det\, U_{ij}$ die ADJUNKTE des Elements a_{ij}.
U_{ij} ist die $(n-1)$-reihige (UNTER-)MATRIX, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\underline{A}$ ernsteht.

Bezeichnung: $det(\underline{A}) = det\left(\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bsp. 6:

a.) $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21}$$
$$= \underline{\underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$$

b.) $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12} + a_{21} + a_{33})$$

(Alternativ auch: Regel von SARRUS [diese gilt NUR für 3-reihige Determinanten] $\Rightarrow$ (Summe der Produkte der Diagonalen nach rechts unten)-(Summe der Produkte der Diagonalen nach links unten))

Satz 2:

a.) $det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$

b.) $det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T)$

Wegen Satz 2b gelten für alle folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften auch sinngemäß für die Spalten.

Satz 3: (Eigenschaften der Determinante)

(E1) $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, dann gilt $det(\underline{B}) = -det(\underline{A})$.

(E2) Es gilt $det(\underline{A}) = 0$ falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.

(E3) Es gilt $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ \lambda a_{i1} & ... & \lambda a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ (steht ein Faktor in einer Zeile einer Determinante, so kann er auch vorgezogen werden).

(E4) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.

(E5) $det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile, $(i = 1, ..., n)$)

$det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach j-ten Spalte, $(j = 1, ..., n)$)

→ ENTWICKLUNGSSATZ

Bsp. 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Spalte = Arbeitsspalte (bleibt unverändert)

Um in der untersten Spalte mehr Nullen zu erzeugen (mit Regel E4):

$S_{1,neu} := S_1 + 6 \cdot S_3$

$S_{2,neu} := S_2 + 2 \cdot S_3$

$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nun kann mit der letzen Zeile relativ einfach die Determinante berchnet werden:

$$= (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

Auf gleiche Weise werden nun wieder in Zeilen Nullen erzeugt:

$Z_{2,neu} := Z_2 - 4Z_1$

$Z_{3,neu} := Z_3 + 2Z_1$

$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E3}{=} (-1) \cdot (-36) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36 \cdot 9 = \underline{\underline{324}}$$

Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), dann mit Entwicklungssatz lösen (E5).

Anwendungen

(1) Vekotorrechnung in $\mathbb{R}^3$ (vgl. später, Abschnitt 1.5.5)

(2) Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem (n Gleichungen, n Unbekannte)

Matrixform $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ mit $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Diese Matrixform besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $det(\underline{A}) \neq 0$.

In diesem Falle gilt $\boxed{x_j = \frac{det(\underline{B}_j)}{det(\underline{A})}}$ $(j = 1, ..., n)$. Wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem man die j-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt (CRAMERSCHE REGEL, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen zur Lösung der Matrixform vgl. folgenden Abschnitt).

1.5.4 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME, RANG EINER MATRIX, INVERSE

1.5.4.1 DAS AUSTAUSCHVERFAHREN

Gegeben sei System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Veränderlichen $y_1, ..., y_n$.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{10} \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a22x_2 + ... + a2nx_n + a_{20} \\ ... \\ y_m &= a_{m1}x_1 + am2x_2 + ... + amnx_n + a_{m0} \end{aligned}$$

Bsp. 8:

Betrieb, in Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$:
a_{ij}... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen.
a_{i0}... Fixkosten in Abteilung i.
x_j... produzierte Mengen von P_j.
y_i... Gesamtkosten in Abteilung i.

Matrix-Schreibweise: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m, \\ j=1,...,n}}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix}$

Tabellenform:

	x_1	x_2	...	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_{10}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_{20}
...	...				
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_{m0}

bzw.

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

Aufgaben:

(1) $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar!).

(2) $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar).

Lösungsprinzip:
Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus, Austauschschritt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$) $\rightarrow$ AUSTAUSCH-VERFAHREN.
Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet:

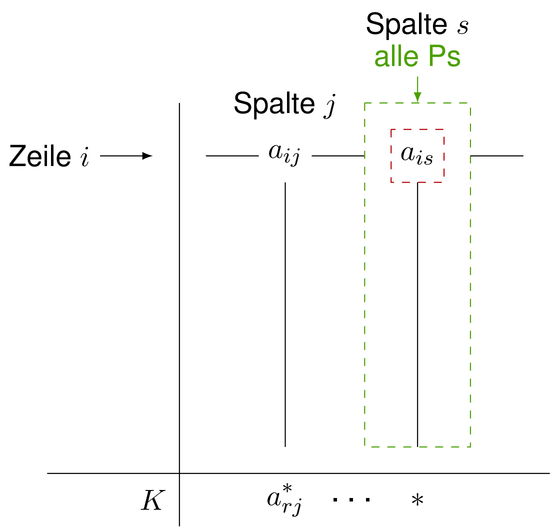
(1) r-te Zeile $y_r = ...$ nach x_s auflösen $x_s = ...$

(2) in allen anderen Zeilen x_s durch die rechte Seite vom obigen x_s ersetzen.
$\curvearrowright$ neue Tabelle

FOLIEN IM NETZ (Neumann)
Praktisches Vorgehen:

(1) Pivotelement (Pivot) kennzeichnen $\circ$

(2) Austauschregeln Austauschregel (AR) 1 bis AR 4 abarbeiten
Dabei für AR 4 unter der alten Tabelle die neue Pivotzeile (PZ) als Kellerzeile notieren.



$a^*_{ij} = a_{ij} + a_{is} \cdot a^*_{rj}$ (Rechteckregel)

Bsp. 8 (Fortsetzung)
$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 50$ (Kosten in Abt. 1)
$y_2 = x_1 + 2x_3 + 40$ (Kosten in Abt. 2)

T_1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	2	3	$\boxed{1}$	50
y_2	1	0	2	40
K	-2	-3	*	-50

T_2	x_1	x_2	y_1	1
x_3	-2	-3	1	-50
y_2	$\boxed{-3}$	-6	2	-60
K	*	-2	$\frac{2}{3}$	-20

T_3	y_2	x_2	y_1	1
x_3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-10
x_1	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	-20

d.h.:

$$x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$$
$$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$$

$\curvearrowright$ bei vorgegebenen Kosten y_1, y_2 ist die Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar.

z.B. $y_1 = 600, \ y_2 = 300$:
$x_2 = t$ (FREI WÄHLBAR)

$$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 300 + t - \frac{1}{3} \cdot 600 - 10 = t - 10$$
$$x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 300 - 2t + \frac{2}{3} \cdot 600 - 20 = 280 - 2t$$
$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}$$

hier für $x_i \geq 0$: $10 \leq t \leq 140$.

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

(1) AVZ ... Austauschverfahren mit ZEILENTILGUNG, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen.

(2) AVS ... Austauschverfahren mit SPALTENTILGUNG, d.h. neue Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der weggelassenen Spalte = Null ist, siehe folgender Abschnitt).

(3) AVSZ ... AVZ+AVS gleichzeitig.

1.5.4.2 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, ..., x_n$)
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
- Gleichungssystem heißt HOMOGEN, falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, sonst UNHOMOGEN.
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$
- Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \cdot 1$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

  Hilfsgrößen $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$
- Tabellenform:

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$

Lösungsprinzip:
Austauschverfahren, Variante AVS (da $y_i = 0$: Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen!)

Fall 1:
Alle y_i sind austauschbar $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar.

z.B.:

TE	x_3	1
x_1	0	4
x_2	2	-3

$\curvearrowright x_1 = 4, \quad x_2 = 2x_3 - 3$ (x_3 frei wählbar)

Fall 2:
Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar.

$\curvearrowright$ Tabelle:

	(evtl.) noch nicht ausgetauschte x_j	1
...		
y_i	0...0...0	α
...		

$\curvearrowright y_i = \alpha$

Fall 2a: $\alpha = 0$
Zeile y_i kann gestrichen werden ($0 = 0$).

Fall 2b: $\alpha \neq 0$
Gleichungssystem nicht lösbar (Widerspruch, da $y_i = 0$)

Das Verfahren endet also im Fall 2b (unlösbar) oder mit einer Tabelle, in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 oder 2a).

TE	x_{S1}	x_{S2}	...	x_{Sq}	1
x_{r1}	...				
x_{r2}	...				
...					
x_{rp}	...				

$x_{S...}$: NBV ... NICHTBASISVARIABLEN (nicht ausgetauschte x_i)
$x_{r...}$: BV ... BASISVARIABLEN (ausgetauschte x_i)

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle: NBV beliebig vorgeben, BV daraus berechenbar.
- Falls keine NBV vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

Def. 8:
Die Darstellung der Endtabelle heißt Basisdarstellung des lin. Gleichungssystems.
Bemerkung: Aus einer Basisdarstellung lassen sich weitere Basisdarstellungen durch Austausch $x_{ri} \leftrightarrow x_{sj}$ gewinnen.

Bsp. 9
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

T1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	3	$\boxed{1}$	2	2
y_2	-5	-3	-2	2
y_3	1	3	-2	10
K	-3	*	-2	-2

mit AVS:

T2	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	$\boxed{4}$	4	8
0	-8	-8	-16
K	*	-1	-2

T3	x_3	1
x_2	1	4
x_1	1	-2
0	0	0

(in T3 kann letzte 0-Zeile gestrichen werden)
$\curvearrowright$ T3 ist Endtabelle (BV: x_1, x_2, NBV: x_3)
allg. Lösung:
$x_2 = x_3 + x_4$
$x_1 = -x_3 - 2$
$x_3 \in \mathbb{R}$ frei wählbar

andere Form: $x_3 = t$ (Parameter), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ Bemerkung:

(1) Bei homogenen System $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht geschrieben werden (nur „gedacht“).

(2) Die Methode AVS entspricht dem sogenannten GAUSS-JORDAN-VERFAHREN.
Der GAUSS-ALGORITHMUS (siehe folgendes Beispiel):

- AVSZ (Spalten- und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken ($\rightarrow$ Kellerzeilen)
- Rückrechnung durchführen

Bsp. 10:

$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

T_1	x_1	x_2	x_2	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	$\boxed{1}$	-1	+3
x_2	-2	*	4	-3

T_2	x_1	x_3	1
0	$\boxed{5}$	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	*	2	-2

T_3	x_3	1
0	$\boxed{6}$	-3
x_3	*	$\frac{1}{2}$

Rückrechnung:

$T_3 \curvearrowright x_3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
$T_2 \curvearrowright x_1 = 2x_3 - 2 = \underline{\underline{-1}}$
$T_1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$

Lösung: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Bemerkung:

m Gleichungen, n Unbekannte
$m \leq n \quad \curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n \quad \curvearrowright$ Gauß oder AVS

1.5.4.3 WEITERE ANWENDUNGEN DES AUSTAUSCHVERFAHRENS

(1) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.

Ansatz: $\boxed{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ (Spalten von $\underline{A}$ sind die (Spalten-)Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$). Homogenes GLS mit AVS mit Starttabelle:

	$\underline{x}^T$
$\underline{y}$	A

- Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können.
- Allgemein: Die zu den ausgetauschten x_i, d.h. BV, gehörenden a_i sind unabhängig. Sie bilden die Basis von $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

(2) Rang einer Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ... $rang(\underline{A})$ (auch: $rank(\underline{A}), rk(\underline{A}), ...$)

Def.: $\boxed{rang(\underline{A}) := dim\ L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)}$
(Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes).

Berechnung: $rang(\underline{A})$ =Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit $\begin{array}{c|c} & x^T \\ \hline \underline{y} & A \end{array}$ als Starttabelle (1-Spalte entfällt).
Bemerkung: Es gilt $rang(\underline{A}^T) = rang(\underline{A})$.

(3) Berechnung der Determinante einer (n, n)-Matrix (vgl. Merkblatt „Lineare Algebra“)

1.5.4.4 DIE INVERSE EINER (N,N)-MATRIX

Def. 9:
Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n, n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ EINDEUTIG nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die (n, n)-Matrix $\underline{B}$ INVERSE von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$. Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ REGULÄR, sonst SINGULÄR.
Bemerkung:

(1) $\boxed{\underline{A} \text{ ist regulär}} \Leftrightarrow \boxed{det\,\underline{A} \neq 0}$

(2) $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\boxed{\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}}$.

Rechenregeln: Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ regulär. Dann gilt:

- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$
- $\left(\underline{A}^{-1}\right)^{-1} = \underline{A}$
- $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$
- $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
- $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^T$

Verfahren zur Ermittlung der Inversen:

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline y & \underline{A} \end{array}$
  Fall 1: alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ regulär.
  Fall 2: nicht alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ singulär.
  im Fall 1: $\curvearrowright$ nach Ordnen der Zeilen und Spalten: $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar.
- Probe: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Bsp. 11:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht: $\underline{A}^{-1}$ (falls diese existiert).

Lösung:

T_1	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{1}$	2	1
y_2	1	0	2
y_3	1	-1	1
K	*	-2	-1

T_2	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-2	-1
y_2	1	-2	$\boxed{1}$
y_3	1	-3	0
K	-1	2	*

T_3	y_1	x_2	y_2
x_1	2	-4	-1
x_3	-1	-2	1
y_2	1	$\boxed{-3}$	0
K	$\frac{1}{3}$	*	0

T_4	y_1	y_3	y_2
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$$\curvearrowright \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$

1.5.5 VEKTORRECHNUNG IM RAUM

1.5.5.1 KARTESISCHE BASIS

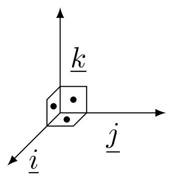
Einige Begriffe:

(1) BETRAG eines Vektors $\underline{a}$: Länge des Pfeils, der $\underline{a}$ repräsentiert.
Bezeichnung: $|\underline{a}|$

(2) EINHEITSVEKTOR: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$.

(3) zu $|\underline{a}| \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\boxed{\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}}$

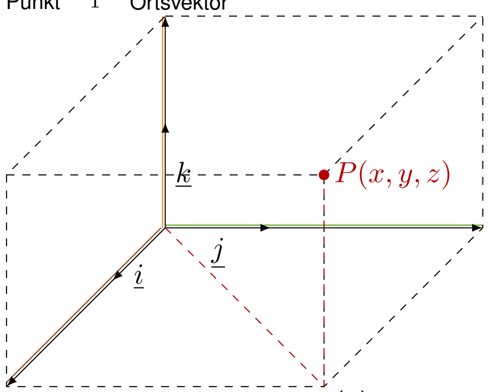
(4) KARTESISCHE BASIS $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ besitzen Betrag 1, stehen $\perp$ aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubregel: Rechtsschraube $\perp$ zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen. $\curvearrowright$ Bewegung in Richtung $\underline{k}$).



(5) KARTESISCHES KOORDINATENSYSTEM:
- Fester Punkt O als Ursprung
- kartesische Basis $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ (jeweils linear unabhängig)

Damit eineindeutige Zuordnung:

$$\underset{\text{Punkt}}{P} \overset{1}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} \underset{\text{Ortsvektor}}{\overrightarrow{OP}} = \underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$



$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Kurzschreibweise – beide Schreibweisen gleichberechtigt)

Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $\boxed{|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Bemerkung:

Bezeichnung auch $\underline{e_1} = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x} = \overrightarrow{x} = \mathbf{x}$$

1.5.5.2 DAS SKALARPRODUKT

Def. 10:
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi)$ heißt SKALARPRODUKT der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Eigenschaften des Sklarproduktes:

a.) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$

b.) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)

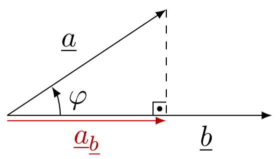
c.) $(\lambda\, \underline{a} + \mu\, \underline{b},\ \underline{c} = \lambda \cdot (\underline{a}, \underline{c}) + \mu(\underline{b}, \underline{c})$ (Linearität)

Satz 4:
Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$.

Folgerung: $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}}$
Schreibweisen: $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \circ \underline{b} = \ldots$

Anwendungen:

(1) Projektion $\underline{a_b}$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$: $\boxed{\underline{a_b} = (\underline{a}, \underline{b}^0)\underline{b}^0 = \dfrac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2}\underline{b}}$



Herleitung:
$|\underline{a_b}| = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi)$

$$\underline{a_b} = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|^2} = (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \frac{1}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$$

(2) Winkel φ zwischen zwei Vektoren: $\boxed{\cos(\varphi) = \dfrac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$

Bsp. 12:

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$$\cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}\right) \approx 15,92°$$

b.) Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$: $\underline{ba} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \frac{29}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14}\underline{e}_1 - \frac{29}{7}\underline{e}_2 + \frac{29 \cdot 3}{14}\underline{e}_3$

(3) ORTHOGONALITÄTSKRITERIUM:

$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\underbrace{|\underline{a}| = 0}_{\underline{a}=} \vee \underbrace{|\underline{b}| = \underline{0}}_{\underline{b}=\underline{0}} \vee \cos(\varphi) = 0)$

Vereinbarung: $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright$ $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a} \perp \underline{b}}$

1.5.5.3 DAS VEKTORIELLE PRODUKT

Def. 11:

Das vektorielle Produkt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

(1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\varphi)$

(2) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$.

(3) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften des vektoriellen Produktes:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda\underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda\underline{b})$
- Speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$
- $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3,\ \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ usw.

Satz 5:

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} \underset{\text{Schema}}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \widehat{=} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 13:

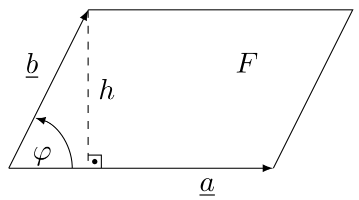
$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}0\\-4\\7\end{pmatrix}$$

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix}-2&-4\\3&7\end{vmatrix}\underline{i}-\begin{vmatrix}1&0\\3&7\end{vmatrix}\underline{j}+\begin{vmatrix}1&0\\-2&-4\end{vmatrix}\underline{k}=-2\underline{i}-7\underline{j}-4\underline{k}=\begin{pmatrix}-2\\-7\\-4\end{pmatrix}$$

Kontrolle: $(\underline{a}\times\underline{b},\underline{a})=0,\ (\underline{a}\times\underline{b},\underline{b})=0$!

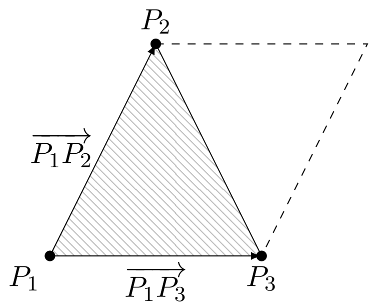
Anwendungen:

(1) FLÄCHENINHALT des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannte PARALLELOGRAMMS: $\boxed{F=|\underline{a}\times\underline{b}|}$



$$\sin(\alpha)=\frac{h}{|\underline{b}|}$$
$$F=|\underline{a}|\cdot h=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin(\alpha)=|\underline{a}\times\underline{b}|$$

(2) Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$: $\boxed{F=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_2}\right|}$ (halbes Parallelogramm)



(3) PARALLELITÄTSKRITERIUM: $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{0}\ \Leftrightarrow\ |\underline{a}\times\underline{b}|=0\ \Leftrightarrow\ (|\underline{a}|=0\vee|\underline{b}|=0\vee\sin(\varphi)=0)$
Vereinbarung: $\underline{0}$ || zu jedem Vektor
$\curvearrowright \boxed{\underline{a}\times\underline{b}=\underline{0}\ \Leftrightarrow\ \underline{a}||\underline{b}}$

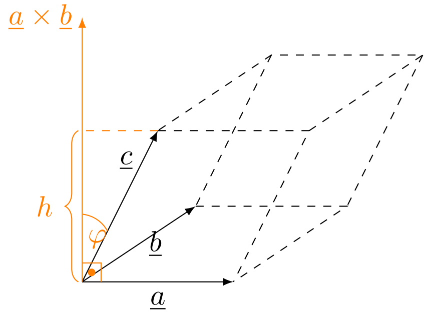
1.5.5.4 DAS SPATPRODUKT

Def. 12:
Die Zahl $(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\underline{a},\underline{b}$ und $\underline{c}$.
Eigenschaften: $(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c})=(\underline{b}\times\underline{c},\underline{a})=(\underline{c}\times\underline{a},\underline{b})$ (durch zyklisches Vertauschen)

Berechnung: $\boxed{(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c})=det(\underline{a}|\underline{b}|\underline{c})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}$

Anwendung:

(1) Volumen des von $\underline{a},\underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotop): $\boxed{V=|(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c})|}$



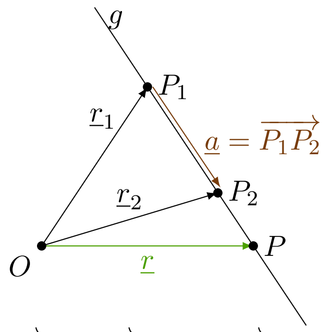
$V = F_{\text{Grundfläche}} \cdot h = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |\cos(\alpha)| = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$
Bemerkung:

$$\text{Spatprodukt} \begin{cases} > 0 & \text{... Rechtssystem} \\ < 0 & \text{... Linkssystem} \end{cases}$$

(2) KOMPLANARITÄTSKRITERIUM:
Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in einer (in O angehefteten) Ebene
$\Leftrightarrow \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0$
$\Leftrightarrow \ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear abhängig.

1.5.5.5 GERADEN- UND EBENENGLEICHUNGEN

(1) Parameterdarstellung einer Geraden g durch P_1 und P_2:
P ... beliebiger Punkt von g

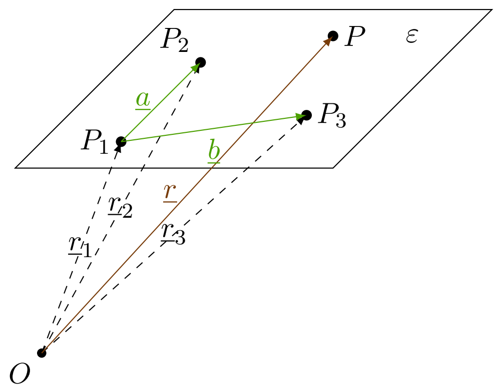


$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot \underline{a}}$ (Punkt-Richtungs-Form)
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} \quad (t \in \mathbb{R})$ (Zwei-Punkte-Form)

Bsp.:
Gerade durch die Punkte $P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (0, 1, 4)$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(2) Parameterdarstellung einer Ebene ε durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen.



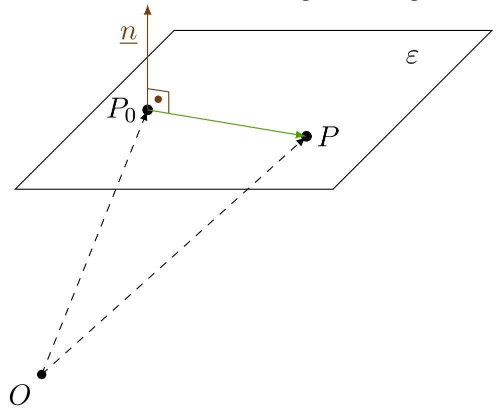
P ... beliebiger Punkt von ε

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot \underline{a} + v \cdot \underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + v(\underline{r}_3 - \underline{r}_1)}$

(3) Parameterfreie Ebenengleichung



Normalenvektor $\underline{n}$ ($\underline{n} \neq 0,\ \underline{n} \perp \varepsilon$):

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

Dabei sei $P(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in ε und $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt in ε mit Orthogonalitätskriterium $(\underline{n}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$ bzw. $\boxed{(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0}$.

Ausführlich: $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$, d.h. $a \cdot (x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Allgemeine Form: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ mit $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Bsp. 15:

Ebene durch $P_1(1, 0, 0), P_2(3, 1, 5), P_3(-2, 0, 2)$

- P.d. (Parameterdarstellung) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}} + v \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

- Ein Normalenvektor ist bpsw. $\underline{u} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $\curvearrowright$ Parameterfreie Darstellung: $2x - 19y + 3z + d = 0$
  d berechnen: Einsetzen von $x = 1, y = z = 0$ (P_1) liefert $2 \cdot 1 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -2$
  $\curvearrowright$ $\boxed{2x + 19y + 3z - 2 = 0}$

1.5.5.6 EINIGE GEOMETRISCHE GRUNDAUFGABEN

(1) Schnitt von Gerade und Ebene

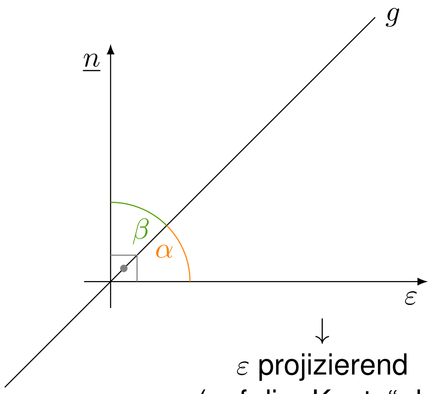
Bsp. 16:
Gegeben:
Ebene ε: $2x - 4y + z + 3 = 0$
Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Gesucht:

a.) Schnittpunkt (Spurpunkt) $S(x_S, y_S, z_S)$

b.) Schnittwinkel

zu a.) $g: x = 3-t,\ y = t,\ z = 1-2t$ einsetzen in Ebenengleichung: $2(3-t) - 4 \cdot t + 1 - 2t + 3 = 0 \Rightarrow -8t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$
$t = \frac{5}{4}$ in Geradengleichung einsetzen: $x_S = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, y_S = \frac{5}{4}, z_S = 1 - 2\frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$
$\curvearrowright$ $\underline{\underline{S\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)}}$

zu b.) Schnittwinkel:



↓
ε projizierend
(auf die „Kante“ der
Ebene blickend)

$\beta = \measuredangle(\underline{n}, \underline{a})$ (Richtungsvektor von g)
$\alpha = |90° - \beta|$
$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = arrcos\left(\frac{(\underline{n}, \underline{a})}{|\underline{n}| \cdot |\underline{a}|}\right) \approx 135,45°$
$\curvearrowright$ $\alpha = |90° - \beta| \approx 45,45°$

(2) Schnitt zweier Ebenen: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte

Bsp. 17:
Schnitt der Ebenen $\varepsilon_1: \; x+y+z-1=0$ und $\varepsilon_2: \; x-2y+3z+4=0$.
Austauschverfahren:

T_1	x	y	z	1
0	$\boxed{1}$	1	1	-1
0	1	-2	3	4
K	*	-1	-1	1

T_2	x	z	1
x	-1	-1	1
0	-3	$\boxed{2}$	5
K	$\frac{3}{2}$	*	$-\frac{5}{2}$

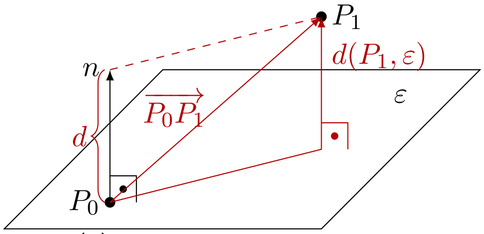
T_3	y	1
x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$y \ldots$ NBV, $y=t$ (beliebig), $x=-\dfrac{5}{2}t+\dfrac{7}{2}$, $z=\dfrac{3}{2}t-\dfrac{5}{2}$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t+\frac{7}{2} \\ t \\ \frac{3}{2}t-\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$

(3) Abstand $d(P_1,\varepsilon)$ eines Punktens P_1 in einer Ebene ε.
ε: $ax+by+cz+d=0$, Punkt $P_1(x_1,y_1,z_1)$

$$\boxed{d(P_1,\varepsilon)=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



$\underline{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P_0 \in \varepsilon$, d.h. $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

$$d(P_1,\varepsilon)=\left|\overrightarrow{P_0P_1}_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_0P_1},\underline{n}\right)\right|}{|\underline{n}|}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{pmatrix} x_1-y_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(P_1,\varepsilon)=\frac{|a(x_1-x_0+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Bsp. 18:
Abstand von $P_1(2,-9,-16)$ von der Ebene $\varepsilon: \; 3x-7y+8z+26=0$.

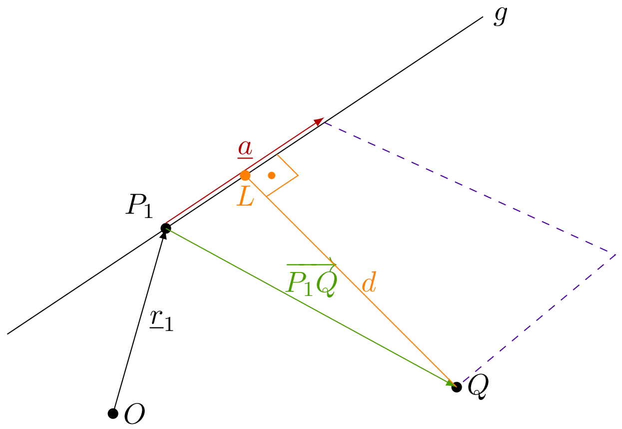
$$d(P_1,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 2-7\cdot(-9)+8\cdot(-16)+26|}{\sqrt{3^2+(-7)^2+8}}=\frac{|-33|}{\sqrt{122}}=\underline{\underline{\frac{33}{\sqrt{122}}}}$$

Bemerkung: Gerade g in der x-y-Ebene, Gleichung $ax+by+c=0$, NV: $\underline{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, Abstand eines Punktes $P_1(x_1,y_1)$ von g:

$$\boxed{d(P_1, g)} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(4) Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g (in $\mathbb{R}^3$).

$g : \underline{r} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{\underline{r}_1} + t\underline{a} \quad t \in \mathbb{R}$ (Parameterdarstellung)



(d ist Höhe $\overline{LQ}$ des von $\underline{a}$ und $\overrightarrow{P_1Q}$ aufgespannten Parallelogramms)

Lotfußpunkt: $\boxed{\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}}}$

Bsp. 19:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}, Q(1, 1, 1)$$

a) Abstand $d(Q, g)$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_1Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(Q, g) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}$$

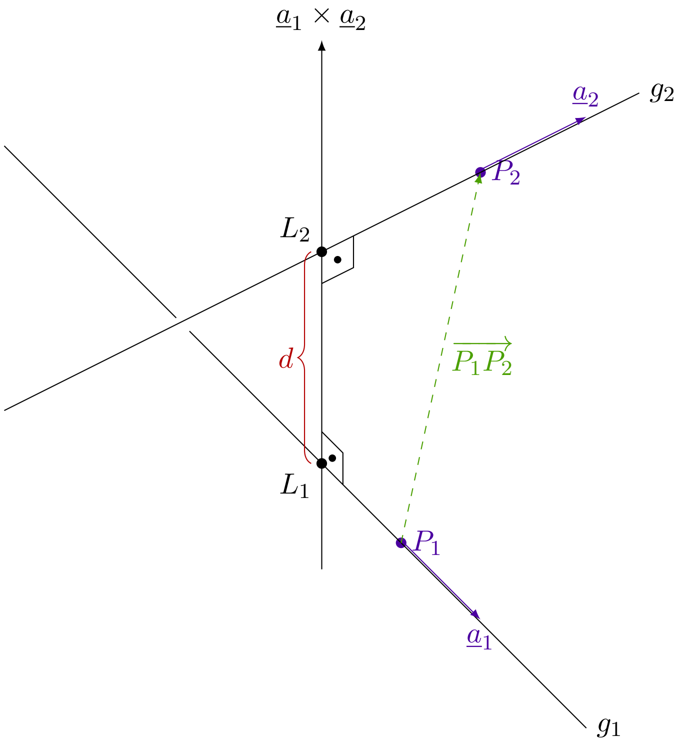
b) Lotfußpunkt: $\overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}} = \dfrac{\left(\overrightarrow{P_1Q}, \underline{a}\right)}{|\underline{a}|^2} \cdot \underline{a} = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

(5) Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier nicht paralleler Geraden g_1 und g_2.

$g_1 : \ \underline{r} = \underline{r}_1 + s \cdot \underline{a}_1$

$g_2 : \ \underline{r} = \underline{r}_2 + t \cdot \underline{a}_2 \quad (s, t \in \mathbb{R})$



$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_2}_{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}\right| = d(g_1, g_2) = \frac{|(\underline{r}_2 - \underline{r}_1, \underline{a}_1 \times \underline{a}_2)|}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$

Bemerkung: Lotfußpunkte L_1 und L_2 aus Bedingungen $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_2$ ermittelbar.

1.5.6 EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Es sei $\underline{A}$ eine (n, n)-Matrix.

Def. 13:
Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt EIGENWERT (EW) der quadratischen Matrix $\underline{A}$, falls die Gleichung $\boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}}$ nichttriviale Lösungsvektoren $\underline{x}$ besitzt. Diese heißen dann EIGENVEKTOREN (EV) von $\underline{A}$ zum Eigenwert λ.

Diskussion:

(1) $\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$
D.h. nichttriviale Lösungen existieren genau dann, wenn $\boxed{det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0}$ (CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG) gilt.
Vorgehensweise zur Ermittlung von EW und EV:

- charakt. Gleichung lösen (n i.a. komlpexe Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$)
- Gleichungssystem $(\underline{A} - \lambda_i \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ für $i = 1, ..., n$ lösen.

Im folgenden werden nur symmetrische (n, n)-Matrizen $\underline{S}$ betrachtet, d.h. $\underline{S}^T = \underline{S}$.

Satz 6:
Es sei $\underline{S}$ eine symmetrische (n, n)-Matrix. Dann gilt:

(1) Alle Eigenwerte von $\underline{S}$ sind reell.

(2) Zu verschidenen EW λ_1 bzw. λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) gehörende EV $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ sind orthogonal (vgl. Disskussion).

(3) Es gibt eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$, die aus n paarweise orthonormierten EV $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ von $\underline{S}$ besteht.

(4) Es sei $\underline{V} = (\underline{v}_1|...|\underline{v}_n)$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren n paarweise orthonomierte EV von $\underline{S}$ sind. Dann gilt:

- $\underline{V} \cdot \underline{V}^T = \underline{V}^T \cdot \underline{V} = \underline{E}$ (d.h. $\underline{V}^{-1} = \underline{V}^T$, $\underline{V}$ ist sogenannte orthogonale Matrix)
- $\underline{V}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \curvearrowright \boxed{\underline{S} = \underline{V} \cdot \Lambda \cdot \underline{V}^T}$
- Es gilt $\underline{S}^{-1} = \underline{V} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \underline{V}^T$ mit $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}$

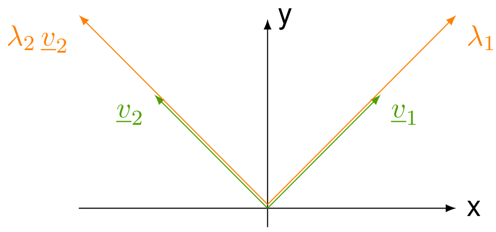
  $\underline{S}^n = \underline{V} \cdot \Lambda^n \cdot \underline{V}^T$

BETRAG (NORM) eines Vektors $|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ paarweise orthonormiert bedeutet:

$$(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

(2) Veranschaulichung im Fall $n = 2$:
Die symmetrische Matrix $\underline{A}$ habe die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und orthonomierte EV $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_2$, $V = (\underline{v}_1|\underline{v}_2)$. Es gilt $\underline{A} \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$, $\underline{A} \cdot \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$.

D.h $\underline{A}$ bewirkt eine Skalierung mit den Faktoren λ_1 bzw. λ_2 in Richtung $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$.



Def. 14: Es sei $\underline{S}$ eine reelle symmetrische Matrix vom Typ (n, n). Die Funktion $y = Q(\underline{x}) := \underline{x}^T\, \underline{S}\, \underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}$) heißt QUADRATISCHE FORM.

Diskussion:

(1) Im Falle $n = 2$ stellt $Q(\underline{x}) = const)$ (bzw. $Q(\underline{x}) + \underline{a}^T \underline{x = const}$) eine Kurve 2. Ordnung dar. Deren Gestalt kann durch die sogennante Hauptachsentransformation ermittelt werden.

(2) Ausführliche Schreibweise $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\underline{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ (mit $s_{12} = s_{21}$).

$$\boxed{Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}x^2}$$

(3) Es seien λ_1 und λ_2 die EV von $\underline{S}$ und $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ orthonormierte EV. Für einen beliebigen Vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ seien x^* und y^* die Koordinaten bzgl. der Basis $\underline{v}_1, \underline{v}_2$:

$$\boxed{\underline{x} = x^*\underline{v}_1 + y^*\underline{v}_2 = (\underline{v}_1|\underline{v}_2)\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \underline{V}\,\underline{x}^*}$$

Dann gilt:

$\boxed{Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 x^{*2}}$ (Darstellung bzgl. der sog. Hauptachsen)

Dann: $Q(x,y) = \underline{x}^T\,\underline{S}\,\underline{x} = (\underline{V}\,\underline{x}^*)^T\ \underline{S}\ (\underline{V}\,\underline{x}^*) = \underline{x}^{*T}\underbrace{\underline{V}^T\,\underline{S}\,\underline{V}}_{\Lambda}\underline{x}^* = \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2}$

Bsp. 20:

$Q(x,,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 = 45$

Welche Kurve ist das?

- Matrix $\underline{S}$ (vgl. Gleichung aus 2.) aus obiger Diskussion):
  $\underline{S} = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$
- charakteristische Gleichung:
  $det(\underline{S} - \lambda\underline{E}) \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 50\lambda + 225 \overset{!}{=} 0$
  $\underline{\underline{\lambda_1 = 5}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = 45}}$ (Eigenwerte)
- EV zu $\lambda_1 = 5$ $((\underline{S} - \lambda\underline{E})\underline{x} \overset{!}{=} \underline{x})$:

$$\begin{aligned} 8x - 16y &= 0 \\ -16x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright x = 2y \curvearrowright \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

- EV zu $\lambda_2 = 45$:
  $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}} \quad (u \in \mathbb{R}, u \neq 0)$
- orthonomierte EV:
  z.B. $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Rechtssystem!)

Mit Gleichung aus 3.) aus obiger Diskussion:

$Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 x^{*2} = 5x^{*2} + 45y^{*2} = 45$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^{*2}}{9} + \frac{y^{*2}}{1} = 1}$ (Ellipse mit Halbachsen $a = 3,\ b = 1$)

2 FOLGEN, REIHEN, GRENZWERTE

2.1 ZAHLENFOLGEN

2.1.1 GRENZWERTE VON ZAHLENFOLGEN

Def. 1:
Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Eine Funktion f mit $Db(f) = \{u \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ und $Wb(f) \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.
Schreibweise:
$a_n = f(n) \qquad (n \in Db(f))$
$(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...)$
oft $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Bsp. 1:

a.) $a_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$
$(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, ...)$

b.) $a_0 = -1, \; a_n = n \cdot a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (rekursive Def.)
$(a_n) = (-1, -1, -2, -6, -24, ...), \; a_n = -n!$

c.) $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = (0.3, 0.33, 0.333, ...)$

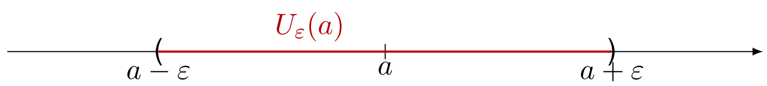
d.) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$$(a_n) = \left(\frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, ... \right)$$

Def. 2:

- (a_n) heißt KONVERGENT, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Die Zahl a heißt GRENZWERT von (a_n).
  Schreibweisen:
  $\boxed{a = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)}$ oder $\boxed{a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a}$
- (a_n) heißt DIVERGENT, falls (a_n) nicht konvergent ist.

Diskussion

(1) Für $\varepsilon > 0$ heißt $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (offenes Intervall) ε-UMGEBUNG VON a.



$\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) \equiv (\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(a))$
d.h. für jedes (noch so kleine) ε, liegen ab einem bestimmten (von ε abhängigen) Index $n_0(\varepsilon)$ alle Glieder $a_n(n \geq n_0(\varepsilon))$ in $U_\varepsilon(a)$.

(2) Im Bsp. 1 sind:
konvergente Folgen:
c.) mit $\underset{n\to\infty}{a_n} = \frac{1}{3}$
d.) mit $\underset{n\to\infty}{a_n} = 1$
divergente Folgen: a.) und b.)

(3) Ist $\underset{n\to\infty}{a_n} = 0$, so heißt (a_n) NULLFOLGE.

Def. 3:
(a_n) heißt:

- STRENG MONOTON WACHSEND, falls für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$.
- MONOTON WACHSEND, falls für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.
- STRENG MONOTON FALLEND, falls für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$.
- MONOTON FALLEND, falls für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

Def. 4:
(a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n.

Diskussion:

(1) (a_n) beschränkt
$\Leftrightarrow \exists c > 0\ \forall n \quad |a_n| \leq C$
$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}\ \exists c_2 \in \mathbb{R}\ \forall n \quad c_1 \leq a_n \leq c_2$

(2) Folgen aus Bsp. 1:

	Folge	Monotonie	Beschränktheit
a.)	$a_n = (-1)^n \cdot n$	–	–
b.)	$a_n = -n!$	streng monoton fallend (ab $n = 1$)	–
c.)	$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n}$	streng monoton wachsend	$0,3 \leq a_n < \frac{1}{3}$
d.)	$a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$	–	$0 \leq a_n < \frac{5}{4}$

Satz 1:
Jede konvergente folge ist beschränkt.

Satz 2:
Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Def. 5:
(a_n) heißt BESTIMMT DIVERGENT gegen $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, falls gilt: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0(c)\ \forall n \geq n_0(c) \begin{cases} a_n > c \\ a_n < c \end{cases}$.

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}}$

Bsp. 2:

a.) aus Bsp. 1c.): $a_n = \frac{3}{10} + ... + \frac{3}{10^n}$, (a_n) monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

b.) aus Bsp. 1b.): $a_n = -n!$, (a_n) monoton fallend und unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist bestimmt divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Diskussion:
Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergent ist, heißt UNBESTIMMT DIVERGENT.
Bpsw. Folge aus Bsp. 1a.) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Einige wichtige Grenzwerte:

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71...$ (EULERsche Zahl)

b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

c.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

d.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

Satz 4: Rechenregeln (Grenzwertsätze)
(a_n) und (b_n) seien zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} = b$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0, b \neq 0)$

Bsp. 3:

a.) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$

$$a_n = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{n}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$\boxed{\text{Ausklammern der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner}}$

b.) $a_n = n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$
(in Klammern: „$\infty - \infty$" $\curvearrowright$ Erweitern mit 3. binomischer Formel)

$$a_n = \frac{n \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)} = \frac{n \cdot (n^2 + 1 - n^2)}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n} = \frac{n \cdot 1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

oder: $\lim\limits_{n\to\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c.) $a_n = \frac{\sin n}{n} \qquad \left(0 \le |a_n| = \frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Allgemein: (a_n) beschränkt und (b_n) bestimmt divergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$

2.1.2 LINEARE REKURSIONSGLEICHUNGEN (DIFFERENZENGLEICHUNGEN)

- Allgemeine Form einer Rekursionsgleichung k-ter Ordnung:
  $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}) \qquad (k \ge 1,\ n \ge n_0 + k)$
- Wir betrachten nur LINEARE REKURSIONSGLEICHUNGEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN (d.h. a_j nicht von n abhängig):
  $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k a_{n-k} + h_n} \quad k \ge 1,\ a_k \ne 0,\ n \ge n_0 + k$
  x_n gesucht, $a_1, a_2, ..., a_k, h_n$ $(n \ge n_0)$ bekannt.
- Indexverschiebung möglich:
  $\boxed{x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_k a_n + h_{n+k}} \quad (n \le n_0)$
  Wichtig ist die Differenz zwischen höchstem und niedrigstem Index von x (=Ordnung der Rekursionsgleichung).
- Da die größen $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ...$ auch durch x_n und die Differenzen $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}, \Delta^2 x_n := \Delta x_n - \Delta x_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}, ...$ ausgedrückt werden können, ist der Name DIFFERENZENGLEICHUNG sehr verbreitet.
- Die Differenzengleichung (aus erstem Punkt) heißt homogen, falls $h_n = 0$ (für alle n), sonst inhomogen.

Zur Lösung von der Differenzengleichung (aus erstem Punkt oberhalb):

(1) Allgemeine Lösung: $\boxed{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}}$, dabei ist $x_n^{(h)}$ die ALLGEMEINE LÖSUNG DER ZUGEHÖRIGEN HOMOGENEN GLEICHUNG $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k}}$ und $x_n^{(p)}$ eine PARTIKULÄRE (SPEZIELLE) LÖSUNG DER INHOMOGENEN GLEICHUNG.

(2) Es gibt k Lösungen $x_n^{(1)}, ..., x_n^{(h)}$ der homogenen Gleichung, so dass gilt:
$x_n^{(h)} = c_1 x_n^{(1)} + ... + c_k x_n^{(h)}$
Diese erhält man mit Hilfe der Lösungen der charakteristischen Gleichung:
$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k$
Dise ergibt sich aus dem Ansatz:
$x_n^{(h)} = \lambda^n \ (\lambda \ne 0)$
$\Rightarrow \lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_k \lambda^{n-k} \quad | : \lambda^{n-k}$
$\Rightarrow$ Bei k verschieden Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_2$ ergibt sich $x_n^{(h)} = c_1 \lambda_1^n + ... + c_k \lambda_k^n$, falls z.B. λ 2-fach auftritt, dann: $x_n^{(h)} = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_1^n \cdot n + ...$

(3) Für die Partikulärlösung $x_n^{(p)}$ führen spezielle Ansätze zum Ziel:

Inhomogenität h_n	Bedingung	Ansatz für $x_n^{(p)}$
Polynom in n (Grad r)	$\lambda = 1$ ist keine$^{*)}$ Lösung von λ^k	Polynom vom gleichen Grade mit unbestimmten Koeffizienten
Potenzfunktion b^n	$\lambda = b$ ist keine$^{*)}$ Lösung von λ^k	$x_n^{(p)} = A \cdot b^n$

$^{*)}$ bei ξ-facher Lösung ist der Ansatz mit n^{ξ} zu multiplizieren
Unbestimmte Koeffizienten $A, ...$ durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung und Koeffizientenvergleich ermitteln.

(4) Die k Koeffizienten $c_1, ..., c_k$ in der allgemeinen Lösung können durch die Anfangsbedingungen (AB) (Vorgabe der ersten k Glieder von (x_n)) ermittelt werden.
Es sind also folgende Schritte durchzuführen:

A) Allgemeine Lösung $x_n^{(h)}$ der homogenen Gleichung ermitteln

B) eine spezielle Lösung $x_n^{(p)}$ der inhomogenen Gleichung ermitteln

C) $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$

D) AB erfüllen

Bsp. 4: $x_{n+1} = 2x_n + 3 \qquad n \geq 0,\ x_0 = 1$
Erste Glieder: $1,\ 5,\ 13,\ 29, ...$
Typ: Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung
Lösung:

A) homogene Gleichung $x_{n+1} = 2x_n$ (charakteristische Gleichung $\lambda_1 = 2$)
$\lambda_1 = 2 \ \Rightarrow\ x_n^{(h)} = C \cdot 2^n$

B) $h_n = 3$ (Polynom des 0-ten Grades). Ansatz: $x_n^{(p)} = A$ (Einsetzen in Ausgangsgleichung)
$A = 2 \cdot 2A + 3 \ \Rightarrow\ A = -3 \ \Rightarrow\ x_n^{(p)} = -3$

C) $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot 2^n - 3$

D) AB: $n = 0 \ \Rightarrow\ x_0 = 1 = C \cdot 2^0 \ \Rightarrow\ C = 4$

Also: $x_n = 4 \cdot 2^n - 3$

Bsp. 5: $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \qquad n \geq 0,\ x_0 = 2,\ x_1 = 3$
Erste Glieder: $2,\ 3,\ 7,\ 13,\ 27,\ 53, ...$
Typ: lineare homogene Dz.-Gleichung 2. Ordnung

A) Schritt A liefert bereits die allgemeine Lösung (B und C entfallen): $\lambda^2 = \lambda + 2 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$
$\Rightarrow\ x_n = x_n^{(h)} = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$

D) AB erfüllen:
$$C = \frac{5}{3},\ C_1 = \frac{1}{3} \begin{cases} n = 0 & \Rightarrow\ x_0 = 2 = C_1 + C_2 \\ n = 1 & \Rightarrow\ x_1 = 3 = -C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

Also: $x_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{5}{3} \cdot 2^n$

Diskussion: Bei einer homogenen linearen Dz.-Gleichung 2. Ordnung können folgende Fälle auftreten:

- $\lambda_1,\ \lambda_2$ reel und verschieden:
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (vgl. Bsp. 5)

- $\lambda_1 = \lambda_2$ (reelle Doppellösung):
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_2^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2 \cdot n)$

- $\lambda_{1,2} = i \pm iv\ (v \neq 0)$ homogene komplexe Lösung:
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (wie im 1. Fall, die Koeffizienten C_1 und C_2 sind aber im allgemeinen komplex, x_n selbst ist aber wieder reell)

Reeller Ansatz ist mit Hilfe der Formeln von EULER und MOIVRE möglich:
$\lambda_1^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$
$\lambda_2^n = \left(r \cdot e^{-i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{-i \cdot n \cdot \varphi} = r^n(\cos(n\varphi) - i \cdot \sin(n\varphi))$
Damit reeller Ansatz:
$x_n = x_n^{(h)} = K_1 r^n \cos(n\varphi) + K_2 r^n \sin(n\varphi)$
Bemerkung: Falls Rechner mit komplexer Arithmetik vorhanden, so ist direkt die Formel aus 1. Fall bequemer.

. . . weiter in Mathe 2