Fakultät Informatik/Mathematik

Lehrstuhl für Stochastik

HOCHSCHULE FÜR
TECHNIK UND WIRTSCHAFT
DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorlesungsmitschrift

MATHE 1 UND 2

Mitschrift von

Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von

Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger / Michael Meinhold

24. Mai 2017

INHALTSVERZEICHNIS

1 Elementare Grundlagen **5**

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik 5
1.1.1 Aussagen, Wahrheitswert 5
1.1.2 Aussagesverschiebung 5
1.1.3 Logische Gesetze (Tautologien) 6
1.1.4 Aussagefunktionen, Quantoren, Prädikatenlogik 7
1.2 Mengen 9
1.2.1 Begriffe 9
1.2.2 Mengenverknüpfungen 10
1.2.3 Relationen 11
1.2.3.1 Grundbegriffe 11
1.2.3.2 Operationen auf Relationen 14
1.2.3.3 Äquivalenzrelationen 17
1.2.3.4 Ordnungsrelationen 18
1.2.3.5 Funktionen 20
1.2.4 Gleichmächtigkeit, Kardinalzahlen 23
1.2.5 Prinzip der vollständigen Induktion 25
1.3 Zahlen 26
1.3.1 Gruppen, Ringe, Körper 26
1.3.2 Zahlentheorie 27
1.3.3 Reelle Zahlen 30
1.3.3.1 Algebraische Struktur 30
1.3.3.2 Zahlendarstellung im Computer 33
1.3.3.3 Ordnungsstruktur 36
1.3.4 Komplexe Zahlen 39
1.3.4.1 Begriff, Rechenregeln 39
1.3.4.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen 41
1.3.4.3 Spezielle Gleichungen 42
1.3.4.4 Anwendung im Wechselstromkreis 43
1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen 44
1.4.1 Elementare Funktionen (Teil 1) 44
1.4.1.1 Polynome 44
1.4.1.2 Gebrochen rationale Funktionen 46
1.4.1.3 Trigonometrische Funktion 46
1.4.1.4 Exponentialfunktion 47
1.4.1.5 Hyperbelfunktion 47
1.4.2 Umkehrfunktionen 47
1.4.3 Elementare Funktionen (Teil 2) 48
1.4.3.1 Wurzel- und Logarithmusfunktionen 48
1.4.3.2 Arcusfunktionen 49
1.4.3.3 Areafunktionen 50
1.5 Lineare Algebra 51
1.5.1 Vektorräume 51
1.5.2 Matrizen 54
1.5.3 Determinanten 56

1.5.4 Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse 59
1.5.4.1 Das Austauschverfahren 59
1.5.4.2 Lineare Gleichungssysteme 61
1.5.4.3 Weitere Anwendungen des Austauschverfahrens 63
1.5.4.4 Die Inverse einer (n,n)-Matrix 64
1.5.5 Vektorrechnung im Raum 65
1.5.5.1 Kartesische Basis 65
1.5.5.2 Das Skalarprodukt 66
1.5.5.3 Das vektorielle Produkt 67
1.5.5.4 Das Spatprodukt 68
1.5.5.5 Geraden- und Ebenengleichungen 69
1.5.5.6 Einige geometrische Grundaufgaben 71
1.5.6 Eigenwerte und Eigenvektoren 74

2 Folgen, Reihen, Grenzwerte 77
2.1 Zahlenfolgen 77
2.1.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen 77
2.1.2 Lineare Rekursionsgleichungen (Differenzengleichungen) 80
2.1.3 Unendliche Reihen 82
2.1.3.1 Grundbegriffe 82
2.1.3.2 Konvergenzkriterien 83
2.1.3.3 Rechenregeln 86
2.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen 87
2.2.1 Grenzwerte von Funktionen 87
2.2.2 Stetigkeit von Funktionen 89
2.3 Potenzreihen 92

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen 95
3.1 Grundbegriffe 95
3.1.1 Das Differential 97
3.2 Differentiationsregeln 98
3.3 Anwendungen 99
3.3.1 Taylorsche Formel, Taylor-Reihe 99
3.3.1.1 Taylor Reihen 102
3.3.2 Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital 103
3.3.3 Kurvendiskussion 106
3.3.4 Kurvendarstellungen 108
3.3.4.1 Darstellung ebener Kurven 108
3.3.4.2 Tangenten und Normalen ebener Kurven 111
3.3.4.3 Krümmung ebener Kurven 112
3.3.4.4 Raumkurven 113
3.3.5 Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung 114

4 Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen 117
4.1 Der Integralbegriff 117
4.1.1 Das bestimmte Integral 117
4.1.2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral 119
4.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) 120
4.2 Integrationsmethoden 120
4.2.1 Substitution 120
4.2.2 Partielle Integration 122
4.2.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen 123

4.2.4 Integration von Potenzreihen . . . 125
4.3 Numerische Integration . . . 126
4.4 Uneigentliche Integrale . . . 127
4.5 Anwendungen . . . 129
4.5.1 Geometrische Anwendungen . . . 129
4.5.1.1 Inhalte ebener Flächen . . . 129
4.5.1.2 Bogenlänge . . . 130
4.5.1.3 Volumen von Rotationskörpern . . . 132
4.5.1.4 Mantelflächen von Rotationskörpern . . . 133
4.5.1.5 Fourier-Reihen . . . 134

5 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen 140
5.1 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher . . . 140
5.1.1 Flächen in $\mathbb{R}^3$ . . . 140
5.1.2 Grenzwerte und Stetigkeit . . . 143
5.2 Partielle Ableitungen . . . 145
5.3 Totale Differenzierbarkeit und Fehlerrechnung . . . 148
5.4 Weitere Begriffe, Anwendungen . . . 149
5.4.1 Richtungsableitung, Tangentialebenen . . . 149
5.4.2 Lokale Extrema (ohne Nebenbedingungen) von Funktionen zweier Veränderlicher . . . 151
5.4.3 Lokale Extrema mit Nebenbedingungen . . . 154

6 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher 157
6.1 Integrale über ebene Bereiche . . . 157
6.1.1 Begriff . . . 157
6.1.2 Reduktion auf Doppelintegrale . . . 158
6.1.3 Anwendungen . . . 159
6.1.4 Koordinatentransformation . . . 160
6.1.4.1 Allgemeine Koordinatentransformationen . . . 160
6.2 Oberflächenintegrale . . . 162
6.2.1 Flächen im Raum . . . 162
6.2.2 Oberflächenelement, Berechnung und Anwendung . . . 163
6.2.2.1 Berechnung von dF für spezielle Flächenelemente . . . 163

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen 166
7.1 Grundbegriffe . . . 166
7.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 167
7.2.1 Geometrische Interpretation . . . 167
7.2.2 DGL mit trennbaren Variablen . . . 168
7.2.3 Lineare DGL 1. Ordnung . . . 169
7.2.4 Weiter DGLn 1. Ordnung . . . 171
7.2.4.1 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen . . . 171
7.2.4.2 Exakte Differentialgleichungen . . . 172
7.3 Lineare DGLn höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 172

1 ELEMENTARE GRUNDLAGEN

1.1 AUSSAGEN UND GRUNDZÜGE DER LOGIK

1.1.1 AUSSAGEN, WAHRHEITSWERT

Aussage: (im weiteren Sinne) Sprachlich sinnvoller, konsatierender Satz. In diesem Abschnitt werden nur zweiwertige Aussagen betrachtet, d.h. Aussagen, die entwoder wahr oder falsch sind.

Bsp. 1:

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen (wahr)

(2) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, z.B. (3,5), (5,7), (11,13), (17,19) usw. (Wahrheitswert nicth bekannt!)

(3) $5 + 7 = 13$ (falsch)

(4) Wie spät ist es? (keine Aussage)

(5) Diese Aussage ist falsch! (keine Aussage, paradox)

(6) Am 30.06.2016 wird es in Dresden regnen.

(1)–(3) sind zweiwertige Aussagen, (4) und (5) sind keine Aussagen, (6) ist keine zweiwertige Aussage (Wahrscheinlichkeit, d.h. Zahl zwischen 0 und 1 angebbar).

Bezeichnungen:

p, q, r, ... Aussagen,

0 ... falsche Aussage,

1 ... wahre Aussage

Wahrheitswert:

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{(falls p wahr)} \\ 0 & \text{(fallls p falsch)} \end{cases}$$

$p \equiv q$ (p IDENTISCH q) ... p und q haben denselben Wahrheitswert

1.1.2 AUSSAGESVERSCHIEBUNG

(1) NEGATION $\overline{p}$ („nicht p“) [oft auch p! bzw. $\neg p$]

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

(2) KONJUNKTION $p \wedge q$ („p und q“)

(3) DISJUNKTION $p \vee q$ („p oder q“) [Alternative – nicht ausschließendes Oder!]

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

(4) IMPLIKATION $(p \Rightarrow q) :\equiv \overline{p} \vee q$ („aus p folgt q“, „wenn p, dann q“)

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1
1	0	1	1

Begriffe: $p \Rightarrow q$ (p: PRÄMISSE, q: KONKLUSION)
Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn die Prämisse richtig und die Konklusion falsch ist!

Bsp. 2:

- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 1 = 1$ (wahr) [durch Quadrieren]
- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 0 = 2$ (falsch) [Addition von 1]

Aus einer falschen Aussage lassen sich durch richtiges Schließen sowohl falsche als auch richtige Aussagen gewinnen.

Andere Sprechweisen: „p ist HINREICHEND für q“, „q ist NOTWENDIG für p“

(5) ÄQUIVALENZ $(p \Leftrightarrow q) :\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ („p äquivalent q“, „p ist notwendig und hinreichend für q“, „p genau dann wenn q“)
(ist genau dann wahr, wenn p und q den selben Wahrheitswert besitzen)

1.1.3 LOGISCHE GESETZE (TAUTOLOGIEN)

Eine Tautologie t ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen stets wahr ist (d.h. $t \equiv 1$).

Bsp. 3:
Einige wichtige Tautologien

(1) $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ (Negation der Negation)

(2) $p \vee \overline{p}$ (Satz vom ausgeschlossenem Dritten)

(3) a) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$
b) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ (de Morgansche Regeln)

(4) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ (Kontrapositionsgesetz)

(5) $p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (direkter Beweis)

(6) $p \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \Rightarrow q$ (indirekter Beweis)

Beweise mittels Wahrheitstafeln (vgl. Übung 1).
Bemerkung zu 1., 3., 4.: Eine Äquivalenz ist genau dann eine Tautologie, wenn beide Seiten identisch sind, z.B. $p \equiv \overline{\overline{p}}$.

Beweistechniken:
Zu beweisen ist q.

(1) Direkter Beweis:
- Nachweis von p (Voraussetzung)
- Richtiger Schluss $p \Rightarrow q$
  Dann q wahr (Behauptung)

(2) Indirekter Beweis: Annahme von $\overline{q}$ auf Wiederspruch führen (auf unterschiedliche Weise möglich, vgl. folgendes Bsp).

Bsp. 4:
$q =$„$\sqrt{2}$ ist irrational“ (keine rationale Zahl)
Beweis indirekt:
Es gelte $\overline{q}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist rational, dann gelten folgende Schlüsse: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen m und n.
$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2 \cdot n^2 = m^2 \Rightarrow 2|m^2$
$\Rightarrow \boxed{2|m}$ (2 ist Teiler von m)
$\Rightarrow 4|m^2$ (mit $m^2 = 2n^2$)
$\Rightarrow 4|2n^2 \Rightarrow 2|n^2 \Rightarrow \boxed{2|n}$
Widerspruch: Da m und n teilerfremd sind. #

Weitere Gesetze

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  $p \vee q \equiv q \vee p$ (Kommutativgesetze)
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (Assoziativgesetze)
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (Distributivgesetze)
- $p \wedge 1 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \wedge p \equiv p$
  $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 0 \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Absorptionsgesetz)

1.1.4 AUSSAGEFUNKTIONEN, QUANTOREN, PRÄDIKATENLOGIK

X sei eine Menge (Gesamtheit von Objekten x mit einem gemeinsamen Merkmal, vgl. Abschnitt 1.2)
$x \in X \ldots$ x ist Element von X. Die Objekte haben Eigenschaften (PRÄDIKATE)

Aussagefunktion (auch Aussageform) $p(x)$: Jedem $x \in X$ ist eine Aussage $p(x)$ zugeordnet. Dabei steht x für ein Objekt, p für ein Prädikat.

Bsp. 5:
X ... Menge der positiven natürlichen Zahlen (1, 2, 3, ...)
$p(x)$:=„x ist eine Primzahl“
$p(5)$ ... wahr, $p(10)$ ... falsch

Quantoren:
Betrachtet werden folgende Aussagen:

(1) „Für alle x (aus X) gilt $p(x)$“ $\equiv \boxed{\forall x\ p(x)}$ (UNIVERSELLER QUANTOR / Allquantor)

(2) „Es existiert (wenigstens) ein x, für welches $p(x)$ gilt“ $\equiv \boxed{\exists x\ p(x)}$ (EXISTENZIELLER QUANTOR)

Zur Schreibweise:

- Bei Anwendungen (außerhalb der reinen Logik) wird oft die Grundmenke X mit angegeben: $\forall x \in X\ p(x)$ usw.
- Falls sich Quantoren auf eine Teilmenge M von X beziehen sollen, dann können folgende Schreibweisen verwendet werden:
  $a = \forall x \in M\ p(x)$, $b = \exists x \in M\ p(x)$.
- Die Schreibweisen in der formalen Logik sind dann:
  $a = \forall x\ (x \in M \Rightarrow p(x))$

Rechenregeln:
$\boxed{\overline{\forall x\ p(x)} \equiv \exists x\ \overline{p(x)}}$
$\boxed{\overline{\exists x\ p(x)} \equiv \forall x\ \overline{p(x)}}$

Mehrstellige Aussagefunktionen

- $p(x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$
  Die Grundmengen X_i können, müssen aber nicht für jede Stelle gleich sein.
- Wird ein Quantor auf eine n-stellige Aussagefunktion angewandt, so entsteht eine (n-1)-stellige Aussagefunktion (eine 0-stellige Aussagefunktion ist eine Aussage)
  z.B.: $\exists y\ p(x, y, z) =: q(x, z)$, die Variable y wird durch den Quantor $\exists$ gebunden (y... gebundene Variable). Wichtig ist der Platz, nicht der Name der Variable.
  x, z ... freie Variable, können durch weitere Quantoren gebunden werden.

Bsp. 6:
Ein Dorf bestehe aus 2 Teilen (Ober- und Unterdorf). Es sei M die Menge aller Bewohner des Dorfes. M_1 bzw. M_2 seien die Teilmengen von M, die dem Ober- bzw. Unterdorf entsprechen.
Wir betrachten folgende zweistellige Aussagefunktionen:
$k(x, y)$... Person x (aus M) kennt Person y (aus M)

a) $a(x) := \forall y\ k(x, y)$... Person x kennt jeden ($\Rightarrow$ „Für alle y gilt: x kennt y“)
$b(y) := \exists x\ k(x, y)$ ... es gibt jemanden, der y kennt
$c := \forall x \forall y\ k(x, y)$ ... jeder kennt jeden
$d := \forall y \exists x\ k(x, y)$ ... jeder wird von wenigstens einer Person gekannt
$e := \exists x \forall y\ k(x, y)$ ... es gibt mindestens eine Person, die alle Personen kennt
Man beachte:

- d und e sind nicht das Gleiche: Die Reihenfolge unterschiedlicher Quantoren muss beachtet werden. Bei d kann für jedes y ein anderes x mit $k(x,y)$ existieren. Diese Abhängigkeit von y wird manchmal in Anwendungen durch $\forall y\, \exists x(y)\; k(x,y)$ ausgedrückt.
- Es gilt aber $e \Rightarrow d$ (stets wahr: Tautologie). Der Wahrheitsgehalt von z.B. c, d, e kann dagegen nicht mit logischen Mitteln bestimmt werden.

b) Negation der Aussagen bzw. Aussageformen aus a).
$\overline{a(x)} \equiv \exists y\, \overline{k(x,y)} \ldots$ x kennt wenigstens eine Person nicht
$\overline{b(x)} \equiv \forall x\, \overline{k(x,y)}$ ... keiner kennt y
$\overline{c} \equiv \exists x\, \overline{\forall y\, k(x,y)} \equiv \exists x\, \exists y\, \overline{k(x,y)}$ ... es gibt jemanden der wenigstens eine Person nicht kennt (jemanden, der nicht alle kennt)
$\overline{d} \equiv \exists y\, \forall x\, \overline{k(x,y)} \ldots$ es gibt jemanden, der von keiner Person gekannt wird $\overline{e} \equiv \forall x\, \exists y\, \overline{k(x,y)}$
... jeder kennt wenigstens eine Person nicht.

c) Folgende Aussagen sind mit Hilfe von Quantoren auszudrücken:
$f \ldots$ jeder aus dem Oberdorf kennt wenigstens eine Person aus dem Unterdorf.
$g \ldots$ es gibt jemanden im Unterdorf, der alle Personen des Oberdorfs kennt.

$$\begin{aligned} f &= \forall x \in M_1\; \exists y \in M_2\; k(x,y) \\ &= \forall x\; (x \in M_1 \Rightarrow \exists y\; (y \in M_2 \wedge k(x,y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \exists x \in M_2\; \forall y \in M_1\; k(x,y) \\ &= \exists x\; (x \in M_2 \wedge \forall y\; (y \in M_1 \Rightarrow k(x,y))) \end{aligned}$$

1.2 MENGEN

1.2.1 BEGRIFFE

Menge: Zusammenfassung gewisser wohl unterscheidbarer Objekte (Elemente) mit einem gemeinsamen Merkmal zu einem Ganzen.

Diskussion: Naiver Mengenbegriff führt zu Widerpsrüchen. z.B. Menge X aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
$X = \{A | A\; Menge, A \notin A\}$
$X \in X$? Wenn $X \in X \Rightarrow X \notin X$ und $X \notin X \Rightarrow X \in X$ (Widerspruch!).
Diese Widersprüche können umgangen werden, wenn nur Teilmengen einer sogenannten Grundmenge betrachtet werden.

Bezeichungen:

- meist große Buchstaben für Mengen: $A, B, ..., M, ..., X$
- $\boxed{x \in M} \ldots$ x ist Element von M
- $\boxed{x \notin M} \ldots$ x ist kein Element von M

Schreibweise:
$M = \{\underset{\text{Elemente}}{\ldots}\}$ oder $M = \{x | p(x)\}$
mit $p(x) =$ Aussage, die genau für die Elemente x aus M wahr ist.

Wichtige Grundmengen:

- $\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ ... Menge der ganzen Zahlen $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ ... Menge der rationaln Zahlen $\{x | x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen
- $\mathbb{C}$ ... Menge der komplexen Zahlen $\{z | z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

Bsp. 1:
M_1 ... Menge der Primzahlen kleiner 10, $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$
M_2 ... Menge der reelen Zahlen zwischen 0 und 1 $M_2 = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} =: \underbrace{(0, 1)}_{\text{Intervallschreibweise}}$

Def. 1: (Intervallschreibweisen)
Es seien a und b reele Zahlen mit $a < b$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ... offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < a\} = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
usw.

Leere Menge: z.B. $\{x \in \mathbb{R} | x = x + 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$ enthält kein Element.
Bezeichnung: $\varnothing$ oder $\{\}$

1.2.2 MENGENVERKNÜPFUNGEN

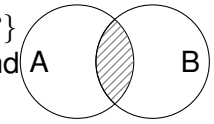
Def. 2:
$\boxed{M_1 = M_2} :\equiv \boxed{\forall x \ (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)}$ (GLEICHHEIT)

Def. 3:
$\boxed{M_1 \subseteq M_2} :\equiv \boxed{\forall x \ (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)}$ (INKULSION) „M_1 ist Teilmenge von M_2“

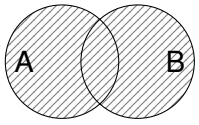
Diskussion:
Ist $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$ so kann man schreiben $M_1 \subset M_2$ (echte Teilmenge).

Def. 4:

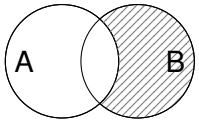
(1) $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
DURCHSCHNITT von A und B



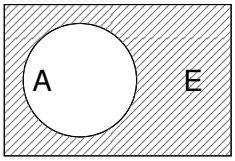
(2) $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
VEREINIGUNG von A und B



(3) $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
DIFFERENZ „A minus B“



(4) Bei Vorliegen einer Grundmenge E:
$\overline{A} := E \setminus A$
KOMPLIMENTÄRMENGE von A



Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

(1) $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ
z.B. gilt $A \cup B = B \cup A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

(2) Allg. I ... Indexmenge, z.B. $\{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ dann:
$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$
$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I \quad x \in A_i\}$

1.2.3 RELATIONEN

1.2.3.1 GRUNDBEGRIFFE

Def. 5:
Die Menge $M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$ heißt KARTESISCHES PRODUKT der Mengen M_1 und M_2 (= Menge aller geordneten Paare)

Bsp. 2:
$\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen, veranschaulicht durch die Zahlengerade
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ ... x-y-Ebene

Def. 6:
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt (BINÄRE) RELATION.

Diskussion:

(1) Verallgemeinerung: $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$ (= Menge geordneter n-Tupel)
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ heißt N-STELLIGE RELATION.

(2) JEDE Teilmenge von $M_1 \times M_2$ ist eine Relation, also auch die Grenfälle $\varnothing$ (gesamt leere Menge) und $M_1 \times M_2$ (vollständige Menge). Wichtig sind aber im allgemeinen die echten Teilmengen, die die verschiedensten Beziehungen zwischen den Elementen von M_1 und M_2 ausdrücken.

Def. 7: (Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$)
Eine Relation $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt:

a) LINKSVOLLSTÄNDIG (LINKSTOTAL), wenn für jedes $x_1 \in M_1$ (wenigstens) ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

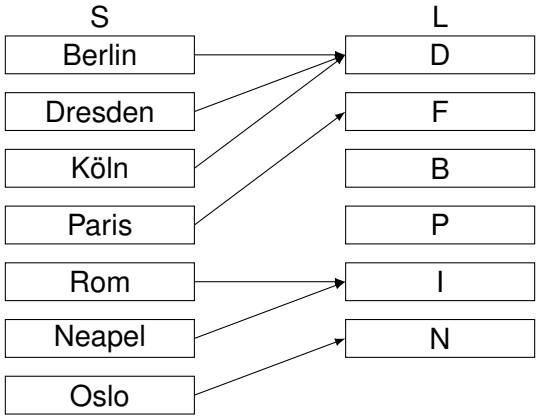
b) RECTHVOLLSTÄNDIG (RECHTSTOTAL, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ (wenigstens) ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

c) RECHTEINDEUTIG, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

d) LINKSEINDEUTIG, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

Bsp. 3:
Es seien S bzw. L folgende Mengen von Städten bzw. Ländern:
$S = \{Berlin,\ Dresden,\ Köln,\ Paris,\ Ram,\ Neapel,\ Oslo\}$
$L = \{D(eutschland),\ F(rankreich),\ B(elgien),\ I(talien),\ P(olen),\ N(orwegen)\}$
Die Relation $T \subseteq S \times L$ soll darstellen, welche Stadt in welchem Land liegt.
Man gebe T elementweise an und stelle die Relation graphisch dar!
Welche der Eigenschaften aus Def. 7 treffen zu?

- $T = \{(Berlin, D), (Dresden, D), (Köln, D), (Paris, F), (Rom, I), (Neapel, I), (Oslo, N)\}$
- graphische Darstellung:



$(x, y) \in T : x \to y$ (gerichteter Graph)

- Eigenschaften:
  linksvollständig
  nicht rechtsvollständig
  rechtseindeutig
  nicht linkseindeutig
  (solche Relationen nennt man auch „Funktionen“, eindeutige Zuordnung [von Stadt $\to$ Land])

Def. 8: (Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$)
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ (Sprechweise auch „Relation auf M“) heißt...

a) REFLEXIV, wenn $(x, x) \in T$ für alle $x \in M$,

b) SYMMETRISCH, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$,

c) ANTISYMMETRISCH, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \Rightarrow x = y$,

d) ASYMMETRISCH, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \notin T$,

e) TRANSITIV, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \Rightarrow (x, z) \in T$

... jeweils für ALLE $x, y, z \in M$ gilt.

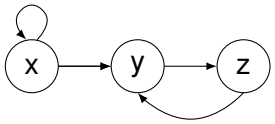
Bsp. 4:
Welche Eigenschaften aus Def. 8 besitzen folgende Relationen?
Es sei P eine Menge von Personen.

a) Eine Person $x \in P$ sei jünger als $y \in P$, wenn ihr Geburtstag später als der von y ist.
$\curvearrowright J \subseteq P \times P$ mit $J = \{(x, y)|x$ ist jünger als $y\}$.
J ist offensichtlich asymmetrisch (damit auch antisymmetrisch [Die Prämisse der Implikation $((x, y) \in J \wedge (y, x) \in J) \Rightarrow x = y$ ist stets falsch, damit die Implikation stets wahr]) und transitiv. Eine solche Relation nennt man auch STRIKTE ORDNUNGSRELATION (vgl. Abschnitt 1.2.3.4).

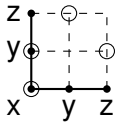
b) Zwei Personon $x \in P$ und $y \in P$ heißen gleichaltrig, wenn x und y das gleiche GeburtsJAHR besitzen.
$\curvearrowright G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y)|x$ und y sind gleichaltrig$\}$.
G ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Derartige Relationen nennt man ÄQUIVALENZRELATIONEN, vgl. Abschnitt 1.2.3.3. Sie teilen P in disjunkte sogenannte Äquivalenzklassen auf (x äquivalent y heißt, x und y besitzen gleiches Geburtsjahr).

Graphische Darstellung von Relationen T in $M \times M$ (auf M). Möglichkeiten:

(1) Elemente von M nur einmal darstellen, Pfeildarstellun wie bisher, bei $(x, x) \in T$ eine Schlinge zeichnen.



(gerichteter Graph)

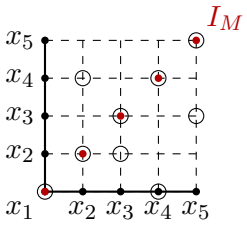
(2)


(Koordinatensystem)
Diese Variante ist auch bei Relationen in $M_1 \times M_2$ möglich.

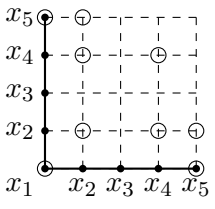
Diskussion:

(1) Die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität lassen sich beim gerichteten Graphen leicht nachprüfen.
REFLEXIVITÄT: Bei jedem Element ist eine Schlinge.
SYMMETRIE: Jeder Pfeil $x \to y$ $(y \neq x)$ besitzt „umkehrpfeil“ $(x \leftarrow y)$.
Antisymmetrie: Schlinge möglich, aber keine Umkehrpfeile.
Asymmetrie: weder Schlingen noch Umkehrpfeile.
TRANSITIVITÄT: Falls ein Pfeil $x \to y$ eine „Fortsetzung“ $y \to z$ besitzt, so verläuft auch ein Pfeil von x nach z.

(2) Auch die Darsteellung von Koordinatensystem lassen sich die Eigenschaften Reflexivität und Symmetrie sofort überprüfen.
REFLEXIVITÄT: Die Diagonale $I_M = \{(x, x)|x \in M\}$ gehört zu T (I_M heißt auch IDENTITÄTSRELATION, diese Relation ist eine spezielle Funktion, identische Funktion $y = f(x)) = x$, $x \in M$ später als Funktion auch mit i_M bezeichnet)
SYMMETRIE: T ist spiegelsymmetrisch bzgl. I_M



ist reflexiv aber nicht symmetrisch



ist symmetrisch aber nicht reflexiv

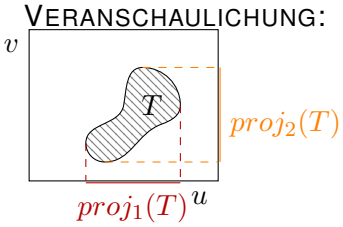
ALTERNATIVE SCHREIBWEISEN: Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Anstelle $\boxed{(x,y) \in T}$ kann man schreiben:

- xTy (x steht in Relation T zu y), für viele wichtige Relationen gibt es spezielle Zeichen, z.B. $x < y$, $x = y$, $g||h$ oder $A \subseteq B$ usw.
- Aussageformen (vgl. Prädikatenlogik): $\boxed{T(x,y)}$ (auch mit mehreren Variablen möglich)

1.2.3.2 OPERATIONEN AUF RELATIONEN

Da Relationen spezielle Mengen sind, gibt es Operationen wie $\cup$, cap usw. auch hier. Weitere für Relationen wichtige Operationen in den folgenden Definitionen:

Def. 9:
Es sein T eine Relation in $U \times V$.
Die Menge $proj_1(T) = \{x \in U | \exists y \in V, (x,y) \in T\}$ heißt PROJEKTION von T auf u (1. Faktor des kartesischen Produkts).
Analog ist $proj_2(T) = \{y \in V | \exists x \in U, (x,y) \in T\}$ die Projektion auf den 2. Faktor.
VERANSCHAULICHUNG:



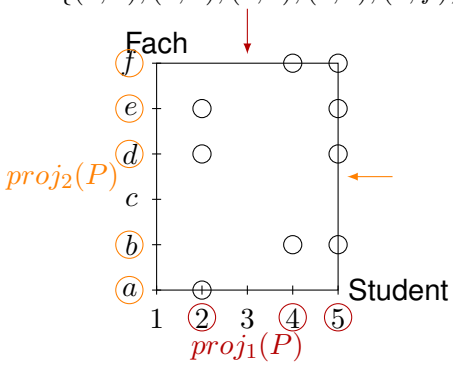
Bsp. 5:
Es sei $S = \{1,2,3,4,5\}$ eine Menge von Studenten und $F = \{a,b,c,d,e,f\}$ eine Menge von Fächern.
Es sei $P \subseteq S \times F$ die Relation, die angibt, welcher Student in welchem Fach eine Nach- bzw. Wiederholungsprüfung im bevorstehenden Prüfungsabschnitt hat.
Die Studenten 1 und 3 haben keine Prüfung ausstehen, Student 2 muss die Prüfungen in a. d und e, 4 in b und f sowie 5 in b, d, e und f ablegen.

a) Man gebe die Relation P elementweise an und stelle sie in einem Koordinatensystem dar.

b) Man ermittle die Projektionen P auf S bzw. F und kennzeichne diese in der Skizze.

Lösung:

a) $P = \{(2,a),(2,d),(2,e),(4,b),(4,f),(5,b),(5,d),(5,e),(5,f)\}$



b) $proj_1(P) = \{2,4,5\} \subseteq S$
(= Menge der Studenten, die wenigsten eine N/W-Prüfung haben.)
$proj_2(P) = \{a,b,d,e,f\} \subseteq F$
(= Menge der Fächer, in denen Student(en) eine N/W-Prüfung haben.)

Def. 10:
Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Die Relation $T^{-1} := \{(y,x)|(x,y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$ heißt INVERSE RELATION (bzw. kurz: INVERSE) von T.

Bsp. 6: (vgl. Bsp. 5)
$P^{-1} = \{(a,2),(b,4),(b,5),(d,2),(d,5),(e,2),(e,5),(f,4),(f,5)\}$
Besonders wichtig ist die folgende Operation:

Def. 11:
Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen.
Als KOMPOSITION (oder auch VERKETTUNG) $T_1 \circ T_2$ („T_2 nach T_1“) wird die Relation $T_1 \circ T_2 := \{(x,z) \in M_1 \times M_3 | \exists y \in M_2 \quad (x,y) \in T_1 \wedge (y,z) \in T_2\}$ in $M_1 \times M_3$ bezeichnet.

Bsp. 7:
Es sei M die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt leben. Weiter seien $S = \{(x,y)|x \text{ ist Mutter von } y\} \subseteq M \times M$ und $T = \{(y,z)|y \text{ ist verheiratet mit } z\} \subseteq M \times M$.
Dann bedeutet $(x,z) \in S \circ T$: Es gibt ein y, sodass x die Mutter von y ist ($(x,y) \in S$) und y mit z verheiratet ($(y,z) \in T$) ist, d.h. „x ist die Schwiegermutter von z“.

Diskussion: Wichtige Eigenschaft der Komposition $\circ$:

- Die Operation $\circ$ ist ASSOZIATIV, d.h. seien $T_1 \subseteq A \times B$, $T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$, dann gilt:
$$\underbrace{(\underbrace{T_1 \circ T_2}_{\subseteq A \times C}) \circ T_3}_{\subseteq C \times D} = \underbrace{T_1 \circ (\underbrace{T_2 \circ T_3}_{\subseteq B \times D})}_{\subseteq A \times B} = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$$

Def. 12:
Es sei T eine Relation in $M \times M$ (auf M).
Als TRANSITIVE HÜLLE T^+ von T bezeichnet man die kleinste Relation, die T enthält und transitiv ist.

Satz 1: Es gilt: $\boxed{T^+ = T \cup (T \circ T) \cup (T \circ T \circ T) \cup \ldots}$

Bemerkung:
Bezeichnung für $\underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{\text{n-mal}}$ auch T^n
(Nicht verwechseln mit Mengenprodukt $\underbrace{T \times ... \times T}_{\text{n-mal}}$ bzw. Funktionen mit n-ten Potenz f^n!)

Damit ist $\boxed{T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j}$

Beweis:

(1) T^+ ist transitiv, denn sei $(x, y) \in T^+$ und $(y, z) \in T^+$, dann existieren natürliche Zahlen $j_1, j_2 \geq 1$ mit $(x, y) \in T^{j_1}$ und $(y, z) \in T^{j_2}$,
d.h. y wird in j_1 Schritten von x aus erreicht und z in j_2 Schritten von y aus erreicht. Also wird z in $j_1 + j_2$ Schritten von x aus erreicht,
d.h. $(x, z) \in T^{j_1+j_2} \subseteq T^+$

(2) Es sei $T \subseteq S$ für eine transitive Relation S.
$\Rightarrow T \circ T \subseteq S \circ S \subset S$ und für beliebiges $j \geq 1$:
$T^j \subseteq S^j \subseteq S$ und somit:
$T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j \subseteq S$,
d.h. T^+ ist tatsächlich die kleinste transitive Relation, die T enthält.

Diskussion:

(1) Analog zur transitiven Hülle einer Relation T in $M \times M$ (auf M) werden die reflexive Hülle bzw. die symmetrische Hülle von T als die jeweils kleinsten Relationen die T enthalten und reflexiv bzw. symmetrisch sind definiert.
Die Ermittlung gestaltet sich etwas „einfacher“ als bei der transitiven Hülle:
REFLEXIVE HÜLLE von T: $\boxed{T \cup I_M}$ (dabei ist $I_M = \{(x, x) | x \in M\}$ [Diagonale / Identitätsrelation])
SYMMETRISCHE HÜLLE von T: $\boxed{T \cup T^{-1}}$

(2) Von Bedeutung ist auch die REFLEXIV-TRANSITIVE Hüllo ven T:
$\boxed{T^* = T^+ \cup I_M}$ (dabei T^+ ... transitive Hülle von T)

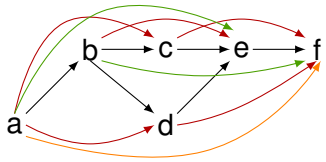
Bsp. 8:
Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$
sowie die Relation $T = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\}$.

a) TRANSITIVE HÜLLE: Zur Ermittlung der Komposition $S \circ T$:
Für jedes Element $(x, y) \in S$ alle Fortsetzungen $(y, z) \in T$ suchen $\curvearrowright (x, z)$ als Element von $S \circ T$ notieren, falls es noch nicht vorkommt.
Bspw.:

- (a, b), Fortsetzungen wären $(b, c), (b, d) \curvearrowright$ Elemente (a, c) und (a, d) notieren.
- (b, c), Fortsetzung $(c, e) \curvearrowright (b, e)$ notieren
- usw.

$\Rightarrow T \circ T = \{(a, c), (a, d), (b, e), (c, f), (d, f)\} = T^2$
$T^3 = T \circ (T \circ T) = \{(a, e), (b, f)\}$ (ausgehend von T in $T \circ T$ nach Fortsetzung suchen)

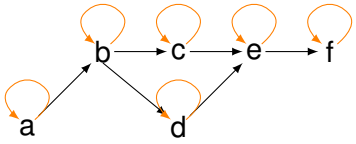
$T^4 = T \circ T^3 = \{(a, f)\}$



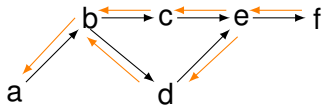
$\Rightarrow T^+ = T \cup \underbrace{(T \circ T)}_{\text{2 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T)}_{\text{3 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T \circ T}_{\text{4 Schritte}} = T \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$

(Formel bricht im endlichen Fall nach endlich vielen Schritten ab.)

b) REFLEXIVE HÜLLE: $T \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$



c) SYMMETRISCHE HÜLLE: $T \cup T^{-1} = T \cup \{(b, a), (c, b), (e, c), (d, b), (e, d), (f, e)\}$



Zur Überprüfung der Eigenschaften aus Def. 8 ist folgender Satz nützlich:

Satz 2:
Es sei $T \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann gilt:

a) T ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq T$ (I_M ... Identitätsrelation)

b) T ist symmetrisch $\Leftrightarrow T^{-1} \subseteq T \quad [\Leftrightarrow T^{-1} = T]$

c) T ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} \subseteq I_M$

d) T ist asymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} = \varnothing$

e) T ist transitiv $\Leftrightarrow T \circ T \subseteq T$

Disskussion:

(1) Beweise ergeben sich unmittelbar aus Def. 8, vgl. Übungsaufgabe 1.24 (für b) und e))

(2) Aus c) und d) ergibt sich z.B.
$\boxed{T \text{ asymmetrisch}} \Rightarrow \boxed{T \text{ antisymmetrisch}}$ (da $\varnothing$ Teilmenge jeder Menge ist)

1.2.3.3 ÄQUIVALENZRELATIONEN

Def. 13:
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt ÄQUIVALENZRELATION auf M, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Diskussion:

(1) Durch eine Äuivalenzrelation wird M vollständig in paarweise elementfremde (disjunkte) ÄQUIVALENKLASSEN zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von M bezüglich T heißt QUOTIENTENMENGE M/T.
Aufgrund der 3. Eigenschaft aus Def. 13 erhält eine Äquivalenzklasse alle Elemente, die untereinander erreichbar sind (=äquivalent) und nur diese.

(2) Äquivalenzklassen enthalten alle Elemente, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar sind, z.B. Bsp. 4 mit $M = P$ (Menge von Personen), Äquivalenzrelation $G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y)|x$ und y haben gleiches Geburtsjahr$\}$, Äquivalenzklassen sind die Jahrgänge.

(3) Anstelle der Schreibweise $(x, y) \in T$, xTy oder $T(x, y)$ verwendet man bei beliebigen Äquivalenzrelationen auf $x \sim y$. Bei vielen speziellen Äquivalenzrelationen spezielle Symbole, sie folgendes Beispiel.

Bsp. 9:

a) M sei eine beliebige Menge $T_1 = I_M = \{(x, y) \in M \times M|x = y\}$ (Identitätsrelation) ist eine Äquivalenzrelation.
Äquivalent heißt hier gleich!
Äquivalenzklassen sind sämtliche einelementige Teilmengen $\{x\}, x \in M$. T_1 heißt die feinste Zerlegung von M die möglich ist. Die größte Zerlegung liefert die Relation $T_2 = M \times M$, die trivialer Weise ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist mit nur einer Äquivalenzklasse M. Für die Anwendungen sind natürlich Relationen wichtig, die eine feinere Zerlegung liefern.

b) $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $m \in \mathbb{N}^*$, $T \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

- $(x, y) \in T :\equiv$ „x und y lassen bei Division durch m den gleichen Rest“
- Bezeichnung $x \equiv y(mod\ m)$ ... x kongruent y (modulo m), z.B. $29 \equiv 8(mod\ 7)$
- T ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, Äquivalenzklassen:
  Restklassen modulo m (siehe Übungsaufgabe 1.19)

c) M ... Menge aller Geraden einer Ebene, $T \subseteq M \times M$ mit

- $(x, y) \in T :\equiv$ „x ist zu y parallel“, Bezeichnung: $x||y$
  $\curvearrowright T$ ist Äquivalenzrelation auf M (siehe Übungsaufgabe 1.21.)

1.2.3.4 ORDNUNGSRELATIONEN

Def. 14:

a) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf M, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

b) Eine Ordnungsrelation heißt VOLLSTANDIG oder LINEAR, wenn für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

Def. 15:
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt STRIKTE ORDNUNGSRELATION auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnungsrelation heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

Bsp. 10:

a) $M = \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\boxed{(x, y) \in T :\equiv x \leq y}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

b) Die Relation „$<$“ ist eine (vollständige) strikte Ordnungsrelation.

c) E sei eiine Menge, M sei die MENGE ALLER TEILMENGEN VON E, d.h. M ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ von E.
$T \subseteq M \times M$ mit $\boxed{(A, B) \in T :\equiv A \subseteq B}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(E) = M$ (Inklusion).

Diskussion:

(1) In der Literatur wird manchmal die Relation im Sinne von Def. 14 als Halbordnung und nur eine vollständige als Ordnung als Ordnungsrelation bezeichnet.

(2) Zu jeder Ordnung T_1 (auf M) gehört eine strikte Ordnung T_2 und umgekehrt: $T_2 = T_1 \backslash I_M$ bzw. $T_1 = T_2 \cup I_M$ (T_1 eist die reflexive Hülle von T_2), z.B. ($\leq$, $<$) oder ($\subseteq$, $\subset$).

(3) Die Symbole $\leq$ (bzw. $<$) können anstelle der Paarschreibweise auch bei beliebigen Ordnungen verwendet werden, falls keine anderen Zeichen dafür üblich sind.

Def. 16:
T sei eine Ordnungsrelation auf eine Menge M. Weiter sei A eine Teilmenge von M.

a) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke von A, wenn gilt:
$\forall x \in A \quad x \leq a \quad (x \leq a$ d.h. $(x, a) \in T$, vgl. 3.) der vorhergehenden Diskussion)

b) Es sei B die Menge der oberen Schranken von A, diese sei nicht leer. Falls es eine KLEINSTE OBERE SCHRANKE s von A gibt, d.h. $\exists s \in B \quad \forall b \in B \quad s \leq b$, so heißt s das SUPREMUM VON A, $\boxed{s = sup\, A}$

c) Gilt $s \in A$, so heißt s das Maximum von A: $s = max\, A = sup\, A$

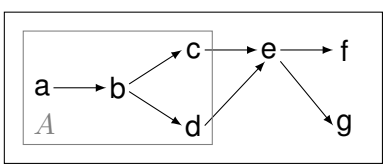
d) Ein Element $m \in A$ heißt maximal, wenn es kein größeres Element in A gibt, d.h. $\forall x \in A\ (m \leq x \Rightarrow m = x)$

Diskussion:

(1) Die Begriffe aus Def. 16 lassen sich auf strikte Ordnungen S übertragen, indem anstelle von S die reflexive Hülle $T = S \cup I_M$ verwendet wird.

(2) Bei Ordnungsrelationen T (auch für strikte Ordnungen) auf endlichen Mengen M kann ein vereinfachter Graph, das sogenannte HASSE-DIAGRAMM, betrachtet werden.
a ⟶ b $(a \neq b)$ bedeutet $(a, b) \in T$ und es gibt kein Zwischenglied $c \neq a$ und $c \neq b$ mit $(a, c) \in T \wedge (c, b) \in T$ (a ist unmittelbarer Vorgänger von b bzw. b Nachfolger von a).
Diesem Diagramm entspricht eine Teilrelation $U \subseteq T$, deren transitiv-reflexive Hülle (bzw. transitive Hülle bei strikten Ordnungen) T ist.

(3) Veranschaulichung von Def. 16 mit einem HASSE-Diagramm einer nicht vollständingen Ordnung (nicht linear)



z.B. Arbeitsgänge, die in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt werden müssen, A bspw. Teilarbeiten einer Zweigfirma
OBERE SCHRANKEN: e, f, g
$sup\, A = e$
MAXIMUM VON A: existiert nicht, da $e \notin A$
MAXIMALE ELEMENTE VON A: c, d

(4) Bei nichtlinearen Ordnungen müssene obere Schranken, Supremum und Maximum nicht existieren, es kann mehrere maximale Elemente $A \subseteq M$ geben.
Bei linearen Ordungen auf ENDLICHEN Mengen gibt es genau ein maximales Element $= max\, A = max\, B$

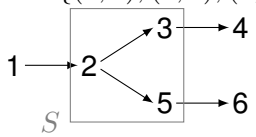
(5) Analog zur Def. 16 werden die Begriffe UNTERE SCHRANKEN a von A ($\forall x \in A \quad a \leq x$), GRÖSSTE UNTERE SCHRANKE (INFINUM) s von A ($B \neq \varnothing$ ... Menge der unteren Schranken, $\exists s \in B \quad \forall a \in B \forall a \leq s$), MINIMUM VON A ($min\, A = inf\, A = s$ falls $s \in A$) und minimales Element m von A ($\forall x \in A \quad (x \leq m \Rightarrow x = m)$) definiert.

Bsp. 11:
Eine bestimmte Arbeitsaufgabe besteht aus mehreren Arbeitsgängen.
Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der Arbeitsgänge. Die Arbeitsgänge $\{2, 3, 5\} =: S$ werden von einer Subfirma durchgeführt. Für die Reihenfolge gilt: 1 muss vor 2, 2 vor 3 und 5, 3 vor 4 sowie 5 vor 6 durchgeführt werden.

a) Man beschreibe diese Forderungen durch eine Relation $U \subseteq A \times A$ und stelle sie graphisch dar (HASSE-Diagramm).
b) Man ermittle die transitive Hülle U^+ von U.
c) Man gebe (falls vorhanden) obere Schranken, Supremum, Maximum, max. Elemente sowie untere Schranken, Infinum, Minimum, min. Elemente von S an.

Lösung:

a) $U = \{(1,2), (2,3), (2,5), (3,4), (5,6)\}$



b) $U \circ U = \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6)\}$
$U \circ (U \circ U) = \{(1,4), (1,6)\}$
$U^4 = \varnothing$

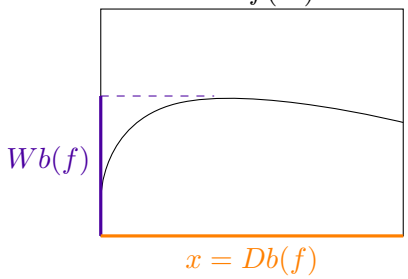
1.2.3.5 FUNKTIONEN

Def. 17:
Eine Relation $f \subseteq x \times y$ heißt FUNKTION (ABBILDUNG) von X in Y, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.

Diskussion:

- Gemäß Def. 7 a+c aus Kapitel 1.2.3.1 bedeutet linksvollständig UND rechtseindeutig, dass zu JEDEM $x \in X$ GENAU EIN $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert, also EINDEUTIGE ZUORDNUNG: $\boxed{x \longmapsto y =: f(x)}$
SCHREIBWEISE: $f : X \to Y$ (manchmal $f|X \to Y$
$y = f(x)$ heißt auch BILD von x, x EIN Urbild von y (muss nicht eindeutig sein).

- $X = Db(f)\ldots$ DEFINITIONSBEREICH,
  $Wb(f) = \{y \in Y | \exists x \in x \quad (x,y) \in f\} \subseteq Y \ldots$ Wertebereich
  Schreibweise auch $f(X) := Wb(f)$ (Menge aller Bilder).



  $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$

Def. 18:

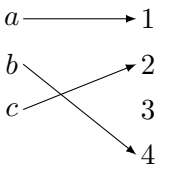
a) Eine Abbildung f heißt SURJEKTIV (Auch Abbildung auf Y),

b) Eine Funktion f heißt INJEKTIV, wenn zu jedem $y \in Wb(f)$ genau ein $x \in Db(f)$ existiert mit $(x,y) \in f$:
$\underset{\in Wb(f)}{y} \longmapsto x =: \underset{\in Db(f)}{f^{-1}(y)}$ („f oben -1“)
Die dadurch erklärte Abbildung $f^{-1} : Wb(f) \to Db(f)$ heißt UMKEHRFUNKTION von f, vgl. auch Kap 1.1.4.

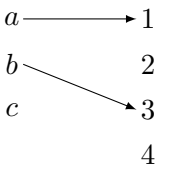
c) Eine injektive UND surjektive Abb. von X auf Y heißt BIJEKTIV.

d) Gebräuchlich sind auch die Begriffe SURJEKTION, INJEKTION und BIJEKTION!

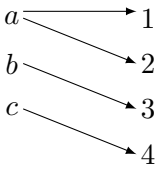
Bsp. 12:
Gegeben sind die Mengen $X = \{a,b,c\}$ und $Y = \{1,2,3,4\}$ sowie folgende Relation in $X \times Y$:



a) T_1:
T_1 ist eine Funktion $f(= T_1) : f : X \to Y \quad (1)$ diese ist injektiv, $Db(f) = X = \{a,b,c\}$, $Wb(f) = \{1,2,4\} =: W$, $f : X \to W \quad (2)$ ist surjektiv, also sogar bijektiv.
Als Relation sind (1) und (2) nicht zu unterscheiden, aber als Funktion.



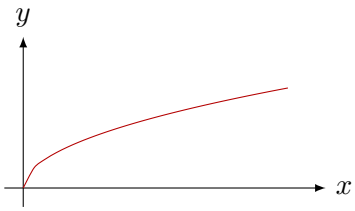
b) T_2:
T_2 ist keine Funktion, nicht linksvollständig. Betrachtet man $D = \{a,b\} \subset X$, so ist durch T_2 eine Funktion $f : D \to Y$ beschrieben, die Funktion ist injektiv und kann mit $W := f(D) = \{1,3\}$ zu einer bijektiven Abbildung $f : D \to W$ umgewandelt werden.



c) T_3:
T_3 ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig.

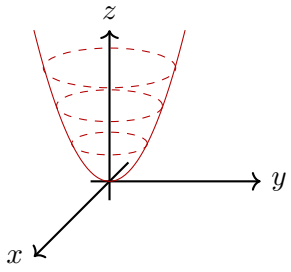
Bsp. 13:

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit „$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$ ist eine FUNKTION EINER REELEN VERÄNDERLICHEN (injektiv).



$Wb(f) = [0, \infty)$
$Db(f) = [0, \infty)$

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 = f(x, y) =: z$ FUNKTION ZWEIER REELLER VERÄNDERLICHER.



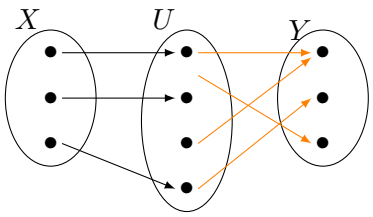
(Paraboloid)

$Db(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (x-y-Ebene)
$Wb(f) = [, \infty)$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \longmapsto f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ ist eine (reelle) Zahlenfolge. $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}, f(2) = \dfrac{2}{3}, \ldots$
Bezeichnung meist mit Index: $a_n = f(n) \curvearrowright ZF(a_n) \quad n \in \mathbb{N}$

Def. 19:
Es seien $g := X \to U$ mit $x \longmapsto u = g(x)$ und $f : U \to Y$ mit $u \longmapsto y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt man die Zuordnung $x \longmapsto y = f(g(x))$ eine Abbildung von X in Y dar, eine sogenannte MITTELBARE FUNKTION (KOMPOSITION / $\overset{u}{}$VERKETTUNG). BEZEICHNUNG: $g \circ f : X \to Y$ mit $y = (g \circ f)(x) = f(g(x))$

Diskussion:

(1) 

$x \longmapsto u = g(x) \quad u \longmapsto f(u) = f(g(x))$
Paarschreibweise: $(x,u) \in g \qquad (u,y) \in f \curvearrowright (x,y) \in g \circ f$

(2) g wird zuerst angewendet, dann f. Wie bei beliebigen Relationen die die Schreibweise $g \circ f$

(3) In der Literatur findet man oft die Schreibweise $f \circ g$ angelehnt an die Schreibweise $f(g(x))$. Die Reihenfolge der Berechnung ast aber von innen nach außen, erst innere Funktion g, dann die äußere f.

Satz 3:
Es sei $f : X \to Y$ eine BIJEKTION, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$, weiter sei i_A für eine beliebige Menge A die identische Abbildung (Identitätsrelation): $i_A : A \to A$ mit $i_A(x) = x$ für alle $x \in A$.
Es gilt dann:
$f \circ f^{-1} = id_X$, d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x (\forall x \in X)$ und
$f^{-1} \circ f = id_Y$, d.h. $(f^{-1} \circ f)(y)) = f(f^{-1}(y)) = y (\forall y \in Y)$
(Funktion und Umkehrfunktion nacheinander angewandt heben sich auf).

Satz 4:
Es seien $g = X \to U$ und $h : U \to Y$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h : X \to Y$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt:
$\boxed{f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}}$

1.2.4 GLEICHMÄCHTIGKEIT, KARDINALZAHLEN

Es sei eine hinreichend mufassend Grundmenge, die alle für eine mathematische Theorie relevante Objekte (Zahlen, Funktionen, usw.) enthält. M sei die Potenzmenge von E(d.h. M ist die Menge aller Teilmengen von E, $M = \mathcal{P}(E)$).

Def. 20:
Zwei Mengen A und B ($A \subseteq E, B \subseteq E$ bzw. $A \in M, B \in M$) heißen GLEICHMÄCHTIG (Bezeichnung $A \sim B$), wenn eine bijektive Abbildung von A auf B (damit auch B auf A) existiert.

Diskussion:

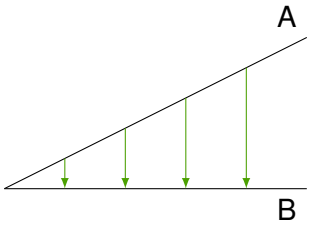
(1) Offensichtlich ist die Relation $T \subseteq M \times M$ mit $(A,B) \in T :\equiv A \sim B$ eine Äquivalenzrelation auf M.

(2) Äquivalenzklassen sind Mengen gleichmächtiger Teilmengen von E. Diese Äquivalenzklassen nennt man KARDINALZAHLEN.

(3) Bei endlichen Mengen bedeutet Gleichmächtigkeit:
Gleiche Anzahl von Elementen
$A = \{a,b,c\}, B = \{X,Y,Z\}$

(Abbildung bspw. $a \to X \quad b \to Y \quad c \to Z$)
Bezeichnung: $cardA = |A| = 3 \quad (= |B|)$
NATÜRLICHE ZAHLEN SIND DIE KARDINALZAHLEN ENDLICHER MENGEN.

(4) Die Anschauung versagt bei unendlichen Mengen.



Die Strecken A und B sind gleichmächtig, obwohl A länger als B ist.

Def. 21:
Eine Menge heißt ABZÄHLBAR UNENDLICH, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Diskussion:

(1) M ist abzählbar unendlich heißt, es existiert eine ZÄHLVORSCHRIFT, bei der jedes Element von M nach endlich vielen Schritten erreicht wird.

(2) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.
Andordnen nach steigendem Betrag:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$

(3) $\mathbb{Q}^+$ ... Menge der pos. rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+$:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{\frac{1}{1}}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \dots \\ \frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \dots \\ \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Zählvorschrift:

a) (aufsteigend) Ordnen nach Summen von Zöhler und Nenner

b) Zahlen mit gleicher Summe der Größe nach aufsteigend anordnen.

c) Bereits enthaltene Zählen (=kürzbare Brücke) weglassen.

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, ... \right\}$$

analog zu $\mathbb{Z}$: Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen (also $\mathbb{Q}^-$ zusammen mit $\mathbb{Q}^+$) ist abzählbar unendlich.

(4) Es gibt Mengen, die mächtiger sind als die Menge der natürlichen Zahlen: ÜBERABZÄHLBARE MENGEN (B heißt MÄCHTIGER als A, wenn se eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive. Schreibweise: $|A| < |B|$).

z. B. gilt:

Satz 5: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} = (0, 1)$ ist überabzählbar.
Beweis: (CANTORSCHES DIAGONALVERFAHREN)
Indirekt, angenommen $M = (0, 1)$ sei abzhälbar unendlich, d.h. $M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.
Für die Zahlen x_k wählen wir z.B. die eindeutige Darstellung als Dezimalbruch (9er Periode vermeiden). Also bspw. $0,39999... = 0,3\overline{9} = 0,4 = 0,40000...$)
$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} ...$
$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} ...$
$x_3 = 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} ...$
...
Es sei $z = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ mit $b_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_k^{(k)} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_k^{(k)} = 1 \end{cases}$ für $k = 1, 2, 3, ...$
Damit unterscheiden sich x_k und z an der k-ten Stelle, d.h. $z \neq x_k$ für alle $k \geq 1$. z ist also nicht in der Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ enthalten, also $z \notin M$.
Andererseits ist $0 < z < 1$ also $z \in (0, 1) = M$. ↯ Widerspruch! #

Satz 6:
Es sei E eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ mächtiger als E.
Beweis:

(1) Die Abbildung $f : E \to M$ mit $f(x) = \{x\}$, die jedem $x \in E$ die einelementige Menge $\{x\} \in M$ zuordnet, ist injektiv.

(2) Angenommen, es gäbe eine bijektive (damit auch surjektive) Abbildung $g : E \to M$. Es sei $A = \{x \in E | x \notin g(x)\} \in M$ (A Teilmenge von E). Da g surjektiv ist, gibt ein $a \in E$ mit $g(a) = A$. Fallunterscheidung:

   a) $a \in A = g(a) \Rightarrow a \notin g(a)$ ↯ Widerspruch!

   b) $a \notin A = g(a) \Rightarrow a \in g(a)$ ↯ Widerspruch!

   Beide Fälle führen auf einen Widerspruch, es gibt keine surjektive und damit auch keine bijektive Abbildung von E auf $\mathcal{P}(E)$. #

Diskussion:
Satz 6 zeigt, dass es unendlich viele unendliche Mächtigkeiten gibt. So gilt bspw. $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(|\mathcal{P}(\mathbb{N})|)|$ usw.

Satz 7:
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig mit dem Intervall $(0, 1)$, also überabzählbar (Beweis: siehe Übungsaufgabe 1.38).

1.2.5 PRINZIP DER VOLLSTÄNDIGEN INDUKTION

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Zu beweisen ist: „Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt die Aussage $p(u)$." (Es sind also abzählbar unendlich viele Einzelaussagen zu beweisen!)

Satz 8:

(1) Es sei $\boxed{p(n_0)}$ wahr (Induktionsanfang)

(2) Für alle nat. Zahlen $n \geq n_0$ sei die Implikation $\boxed{p(n) \Rightarrow p(n+1)}$ wahr (Induktionsschluss)

Dann gilt: $p(n)$ ist für alle nat. Zahlen $n \geq n_0$ wahr.
Zum Beweis:

(1) $\curvearrowright p(n_0)$ ist wahr,

(2) $p(n_0) \Rightarrow p(n_0+1) ... \curvearrowright$ Konkulsion wahr usw. (Dominoeffekt)

Bsp. 14:

Zu beweisen ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

(1) $p(1)$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ (wahr) Induktiansanfang (IA)

(2) Es gelte $p(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Induktionsannahme/-voraussetzung (IV)

(3) zu zeigen $p(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1(n+2)(2n+3)}{6}$ Induktionsschritt (IS)

(4) INDUKTIONSSCHLUSS: $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\overset{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\,(n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) \qquad \#\end{aligned}$$

1.3 ZAHLEN

1.3.1 GRUPPEN, RINGE, KÖRPER

- Gegeben sei eine Menge M und eine zweistellige Operation $\circ$ (d.h. Abb. von $M \times M$ in M)
  Bezeichnung: $(M, \circ)$, analog $(M, \circ, *)$
- Die Operation $\circ$ heißt KOMMUTATIV, wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$.
- Die Operation $\circ$ heißt ASSOZIATIV, wenn $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in M$.

Def. 1:
$(M, \circ)$ heißt GRUPPE, wenn gilt:

(1) Die Operation $\circ$ ist assoziativ

(2) Es gibt genau ein NEUTRALES ELEMENT $e \in M$ mit $a \circ e = e \circ a = a$ (für alle $a \in M$)

(3) Es gibt zu jedem $a \in M$ genau ein INVERSES ELEMENT a^{-1} mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

(4) Eine Gruppe heißt ABELSCH, wenn zusätzlich folgendes gilt:
$\circ$ ist kommutativ

Def. 2:
$(M, \oplus, *)$ heißt RING, wenn gilt:

(1) $(M, \oplus)$ ist eine ABELsche Gruppe.

(2) Die Operation $*$ ist assoziativ.

(3) Es gelten für beliebige $a, b, c \in M$:
$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$
$(a \oplus b) * c = (a * c) \oplus (b * c)$ (Distributivgesetze)

(4) Ein Ring heiß KOMMUTATIVER RING, wenn gilt:
$*$ ist kommutativ

Def. 3:
$(M, \oplus, *)$ heißt KÖRPER, wenn gilt:

(1) $(M, \oplus, *)$ ist ein Ring
(mit dem neutralen Element E_0 für die Operation $\oplus$)

(2) $(M \setminus \{E_0\}, *)$ ist eine ABELsche Gruppe
(mit dem neutralen Element E_1 für die Operation $*$)

1.3.2 ZAHLENTHEORIE

- Eine natürliche Zahl $p > 1$, die nurch durch 1 und sich selbst teilbar ist heißt PRIMZAHL.
- Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist entweder eine Primzahl, oder sie lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.
  Diese sogenannte PRIMFAKTORZERLEGUNG ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Def. 4:
Zwei natürliche zahlen aus $\mathbb{N}^*$ heißen TEILERFREMD, wenn sie außer 1 keine gemeinsamen teiler besitzen.

- Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung der Gestalt $\boxed{a = q \cdot m + r}$ mit $\boxed{0 \leq r < m}$ und $q \in \mathbb{Z}$.
  Bezeichnung: m ... MODUL r ... (kleinste nichtnegative) REST MODULO M ($r \equiv mod(a, m)$)
- Zur Erinnerung: a und b seien ganze Zahlen, $m \in \ltimes^*$, dann $a \equiv b(mod\ m)$ [a kongruent $b\ modulo\ m$]
  $\Leftrightarrow a$ und b haben den gleicher Rest $modulo\ m$
  $\Leftrightarrow a - b$ ist durch m teilbar (d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = k \cdot m$)

Satz 1:
Es sei $a \equiv b(mod\ m)$, $c \equiv d(mod\ m)$, dann gilt: $a+c \equiv b+d(mod\ m)$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$ (d.h. in Summen und Produktenn darf jede Zahl durch einen beliebigen Vertreter der gleichen Restklasse ersetzt werden).

Bsp. 1:

a) $307 + 598 \equiv 1 + (-2) \equiv -1 \equiv 5(mod\ 6)$

b) $307 \cdot 598 \equiv 1 \cdot (-2) \equiv -2 \equiv 4(mod\ 6)$

c) $598^6 \equiv (-2)^6 \equiv 64 \equiv 4(mod\ 6)$

- Man wählt aus jeder Restklasse den kleinsten nichtnegativen Vertreter
  $\curvearrowright$ Menge von Resten $modulo\ m$: $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, ..., m-1\}$
  $\curvearrowright$ „modulare Arithmetik“: Operation $\oplus$ und $\odot$ für Zahlen aus $\mathbb{Z}_m$ erklärbar, in dem für das Ergebnis jeweils der kleinste nichtnegative Rest $modulo\ m$ gewählt wird (vgl. Satz 1)
  z.B. $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, ..., 6\}$, $\quad 5 \oplus 4 = 2$, da $5 + 4 \equiv 9 \equiv 2(mod\ 7)$ $\quad 5 \odot 6 = 2$, da $5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 2(mod\ 7)$
  Falls keine Verwechselung zu befürchten ist, wird die übliche Schreibweise $+$ und $\cdot$ anstelle von $\oplus$ und $\odot$ verwendet.

Def. 5:
Wenn es zu $c \in \mathbb{Z}_m$ eine Zahl $d \in \mathbb{Z}_m$ gibt, mit $c \cdot d \equiv 1(mod\ m)$ (bzw. $c \odot d \equiv 1$), so heißt d die (MULTIPLIKATIVE) MODULARE INVERSE zu c in $\mathbb{Z}_m$.
Bezeichnung: $d = c^{-1}$

Bsp. 2:
$c = 3 \in \mathbb{Z}_7$, wegen $3 \cdot 5 \equiv 1(mod\ 7)$ ist (in $\mathbb{Z}_7$) $3^{-1} = 5$.

Satz 2: Zu $a \in \mathbb{Z}_m, a \neq 0$, gibt es genau dann eine modulare Inverse in $\mathbb{Z}_m$, wenn a und m teilerfremd sind ($ggT(a, m) = 1$).

Satz 3: Es sei p eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein Körper.
Bemerkung: Falls m keine Primzahl ist, so ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring.

EUKLIDischer Algorithmus

- Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers t zweier positiver natürlicher Zahlen, $t = ggT(a, b)$.
- In erweiterter Form bietet der Algorithmus eine Möglichkeit zur Bestimmung der modularen Inversen von a zum Modul m (mit $a < m$ und a, m teilerfremd).

Satz 4: (EUKLIDischer Algorithmus)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Man bildet die endliche Folge
$r_0 := b,\ r_1 = mod\ (a, b),\ r_2 = mod\ (r_0, r_1), ...,\ r_n = mod\ (r_{n-2}, r_{n-1})$, Abbruch falls $r_n = 0$.
In diesem Fall gist $\boxed{ggT(a, b) = r_{n-1}}$ (letzter nicht verschwindender Rest).
Bezeichnung: j-te Division ... $\boxed{r_{j-2} : r_{j-1} = q_j \text{ Rest } r_j}$ $(j = 1, ..., n)$ (dabei $r_1 := a$).

Satz 5: (erweiterter EUKLIDischer Algorithmus)
Zusätzlich zur Folge (r_n) aus Satz 4 bilde man die Folgen
$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = x_0 - q_2 x_1, ...,\ x_j = x_{j-2} - q_j x_{j-1} \quad (j \leq n-1)$ und
$y_0 = 1,\ y_1 = -q_1,\ y_2 = y_0 - q_2 y_1, ...,\ y_j = y_{j-2} - q_j y_{j-1} \quad (j \leq n-1)$
Dann gilt für alle $j = 0, ...,\ n-1$: $\boxed{r_j = x_j \cdot a + y_j \cdot b}$
Insbesondere gilt $\boxed{ggT(a, b) = x_{n-1} \cdot a + y_{n-1} \cdot b}$

Diskussion:

(1) Der Sinn der erweiterten EUKLIDischen Algorithmus besteht darin, in jedem Schrit den DIVISIONSREST r ALS LINEARKOMBINATION VON a UND b MIT GANZZAHLIGEN KOEFFIZIENTEN x UND y darzustellen: $r = x \cdot a + y \cdot b$
Der Mechanismus wird am besten im Rechenschema des nachfolgenden Bsp. 4 deutlich.

(2) Sind c und m teilerfremd, $1 \leq c < m$, d.h. $ggT(m, c) = 1$, so erhält man mit dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus ($a = m, b = c$) eine Darstellung in der Form $\boxed{1 = x \cdot m + y \cdot c}$.
$\curvearrowright y \cdot c \equiv 1(mod\ m)$ und damit $c^{-1} \equiv y(mod\ m)$ (für die modulare Inverse muss eventuell noch der in $\mathbb{Z}_m$ liegende, zu y kongruente, Wert gebildet werden!).

Bsp. 3:
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler t sowie das kleinste gemeinsame Vielfache v der Zahlen 132 und 84.

- Es genügt der „einfache“ Algorithmus:

$$\begin{aligned} 132 : 84 &= 1 \text{ Rest } 48 \\ 84 : 48 &= 1 \text{ Rest } 36 \\ 48 : 36 &= 1 \text{ Rest } 12 \quad \curvearrowright t = ggT(132, 84) = \underline{\underline{12}} \\ 36 : 12 &= 3 \text{ Rest } \boxed{0} \curvearrowright \text{ Ende.} \end{aligned}$$

- $v = \dfrac{a \cdot b}{t} = \dfrac{132 \cdot 84}{12} = \underline{\underline{924}} = kgV(132, 84)$

Bsp. 4:
Man ermittle die modulare Inverse von $\overbrace{11}^{b}$ zum Modul $\overbrace{25}^{a}$.

		$11 = 0 \cdot 25 + 1 \cdot 11$ (1)
$25 : 11 = 2$ Rest 3	$3 = 25 - 2 \cdot 11$	$3 = 1 \cdot 25 - 2 \cdot 11$ (2)
$11 : 3 = 3$ Rest 2	$2 = 11 - 3 \cdot 3$	$2 = -3 \cdot 25 + 7 \cdot 11$ (3)
$3 : 2 = 1$ Rest 1	$1 = 3 - 2$	$\boxed{1} = 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11$
$2 : 1 = 2$ Rest 0		

$\curvearrowright (-9) \cdot 11 \equiv 1(mod\ 25)$
$\curvearrowright 11^{-1} \equiv -9 \equiv 16(mod\ 25)$, die Inverse von 11 in $\mathbb{Z}_{25}$ ist 16.
Zu den Schritten:

(1) $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

(2) mittleres Feld als Linearkombination

(3) ab hier Rechnung links spaltenweise durchführen, dabei Faktoren a und b beibehalten.

EULERSCHE φ-FUNKTION, SATZ VON EULER

Def. 6:
Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann EULERSCHE φ-FUNKTION:
$\varphi(n)$:= Anzahl der zu n teilerfremden Elemente aus $\{1, 2, ..., n\}$. Eigenschaften der φ-Funktion:

- Es sei p eine Primzahl, dann ist $\boxed{\varphi(p) = p - 1}$, $\boxed{\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)}$ $(k \in \mathbb{N}^*$
- Falls $ggT(m, n) = 1$, so gilt $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
- Speziell: $n = p \cdot q$ (p, q Primzahlen), dann $\boxed{\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)}$ (1).

Satz 6: (Satz von EULER)
Es sei $ggT(a, n) = 1$, dann gilt:
$\boxed{a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\ n)}$ (2).

RSA-VERSCHLÜSSELUNG

- Die Formeln (1) und (2) [siehe oberhalb] bilden die Grundlage für die sogenannte RSA-Verschlüsselung (RIVES, SHAMIR, ADLEMAN - 1978)
- Schlüsselerzeugung:
  (1) Man wählt (in der Praxis sehr große) Primzahlen d und q.
  (2) $n := p \cdot q$, $m := \varphi(n) \overset{(1)}{=} (p-1)(q-1)$
  (3) e wird so gewählt, dass $ggT(e, m) = 1$
  (4) $d := e^{-1} (mod\ m)$ (modulare Inverse)
  (5) (n, e) ... öffentlicher Schlüssel
  (n, d) ... geheimer Schlüssel (geheim ist nur d)
  p, q und m werden nicht mehr benötigt, bleiben aber geheim!
- Verschlüsselung:
  Klartext a teilerfremd zu n verschlüsseln mit e, d.h. $b :\equiv a^e (mod\ n)$ bilden (b ... Geheimtext)
- Entschlüsselung:
  Der Empfänger und Besitzer des geheimen Schlüssels bildet $b^d (mod\ m)$ und erhält $b^d \equiv a (mod\ n)$ denn $b^d \equiv (a^e)^d \equiv a^{ed} \equiv a^{1+k \cdot m} \equiv a \cdot \underbrace{\left(a^{\varphi(n)}\right)^k}_{\equiv 1 \text{ wegen Satz 5}} \equiv a (mod\ n)$.
- Praktische Durchführung vgl Übungsaufgabe 2.4

1.3.3 REELLE ZAHLEN

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen.
Auf $\mathbb{R}$ existiert eine algebraische Struktur und eine Ordnungsstruktur.

1.3.3.1 ALGEBRAISCHE STRUKTUR

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den arithmetischen Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) ist ein Körper.

Def. 7:

a.) $\boxed{0! := 1,\ n! = n \cdot (n-1)!}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ FAKULTÄT (rekursive Funktion)

b.) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$, dann sei $\boxed{\binom{\alpha}{0} := 1, \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha - 1}{k-1}}$ Binominalkoeffizient α über k.

d.h. $\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k-1)}{k!}}$

Diskussion:

(1) Für $k, n \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n$ gilt $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

(2) Für $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}}$

(3) BINOMISCHER LEHRSATZ: $(a+b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + ... + b^n$

PASCALSCHES DREIECK:

					1							$n=0$
				1		1						1
			1		2		1					2
		1		3		3		1				3
	1		4		6		4		1			4
1		5		10		10		5		1		5

(Spalte $\hat{=} k$ in $\binom{n}{k}$)

Stellenwertsysteme:

- Es sei $k > 1$ eine natürliche Zahl (die sogenannte Basis)
- $x = (\underbrace{x_p x_{p-1} ... x_1 x_0}_{\text{Vorkomma}}, \underbrace{x_{-1} x_{-2} ... x_{-q}}_{\text{Nachkomma}})_b$
  $:= \underbrace{x_p \cdot b^p + x_{p-1} \cdot b^{p-1} + ... + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0}_{\text{Vorkomma}} + \underbrace{x_{-1} \cdot b^{-1} + x_{-2} \cdot b^{-2} + ... + x_{-q} \cdot b^{-q}}_{\text{Nachkomma}}$
  heißt Darstellung zur Basis b (*).

Bsp. 5:

- $b = 2$ ... DUAL- ODER BINÄRSYSTEM (Ziffern $\{0, 1\}$)
- $b = 3$ ... Trialsystem
- $b = 10$ ... DEZIMALSYSTEM
- $b = 16$ ... HEXADEZIMALSYSTEM (Ziffern $\{0, 1, 2, ..., 9, \underset{10}{A}, \underset{11}{B}, \underset{12}{C}, \underset{13}{D}, \underset{14}{E}, \underset{15}{F}\}$

z.B. $(47)_{10} = (101111)_2 = (1202)_3 = (57)_8 = (2F)_{16}$

Übergang von einem Ziffernsystem zu einem anderen

z.B. $p = 3,\ q = 2$

$$\begin{aligned} x &= x_3 b^3 + x_2 b^2 + x_1 b^1 + x_0 + x_{-1} b^{-1} + x_{-2} b^{-2} \\ &= (x_3 b^2 + x_2 x^1 + x_1) b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2} b^{-1}) b^{-1} \\ &= ((x_3 b^1 + x_2) b + x_1) b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2} b^{-1}) b^{-1} \end{aligned}$$

Grundlage: fortgesetztes Klammern:

$$\begin{aligned} x = ((....((x_p b + x_{p-1}) b + x_{p-2}) b + ... + x_2) b + x_1) b + x_0 + \\ ((...(x_{-q} b^{-1} + x_{-(q-1)}) b^{-1} + ... + x_{-2}) b^{-1} + x_{-1}) b^{-1} \end{aligned}$$

(**)

Bsp. 6: Übergang Dezimalsystem $\rightarrow$ anderes System

- ganzer Teil: fortgesetzte Division durch b und Restabspaltung liefert b-Ziffern in der Reihenfolge $x_0, x_1, x_2, ...$
- gebrochener Teil: fortgesetzte Multiplikation mit b und Abspaltung des ganzzahligen Anteils liefert b-Ziffern in der Reihenfolge $x_{-1}, x_{-2}, ...$

z.B. Dezimalsystem $\rightarrow$ Hexadezimalsystem ($b = 16$)
$x = 435,9$
ganzer Teil:

$435 : 16 = \quad 27 \quad$ Rest $3 \quad \rightarrow x_0$
$27 : 16 = \quad 1 \quad$ Rest $11 \quad \rightarrow x_1$
$1 : 16 = \quad \boxed{0} \quad$ Rest $1 \quad \rightarrow x_2$

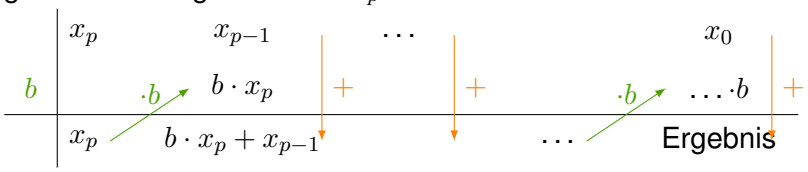
gebrochener Teil:

$0,9 \cdot 16 = \quad 0.4 \quad +14 \quad \rightarrow x_{-1}$
$0,4 \cdot 16 = \quad \boxed{0.4} \quad +6 \quad \rightarrow x_{-2}$ (Periode, da gleicher „Nachkommarest“)

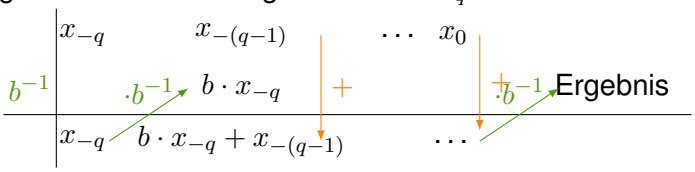
$\curvearrowright x = (1B3, E\overline{6})_{16}$

Bsp. 7: Übergang anderer Systeme $\rightarrow$ Dezimalsystem
Entweder direkte Auswertung von (*) (v.a. beim Dualsystem $\rightarrow$ Addition von 2er-Potenzen) ODER Klammern in (**) von innen nach außen berechnen (zweckmäßig HORNER-Schema).

- ganzer Teil: beginnend mit x_p



- gebrochener Teil: beginnend mit x_{-q}



$x = (1E2, B8)_{16}$
ganzer Teil:

	1	14	2
16		16	480
	1	30	$\boxed{482}$

gebrochener Teil:

		8	11	*
$\frac{1}{16} = 0,0625$			$0,5$	$\boxed{0,71875}$
		8	$11,5$	

$\curvearrowright x = \underline{\underline{482,71875}}$

Bsp. 8: Hexadezimalsystem $\leftrightarrow$ Dualsystem
4 Dualziffern entsprechen einer Hexadezimalziffer ($2^4 = 16$) $\curvearrowright$ 4er Gruppen von Dualziffern ab Komma bilden.

a.) $(A8C, B2)_{16} = (1010\ 1000\ 1100,\ 1011\ 1011\ 001(0))_2$

b.) $((0)110\ 1110,\ 101(0))_2 = (6E, A)_{16}$

1.3.3.2 ZAHLENDARSTELLUNG IM COMPUTER

(1) Ganze Binärzahlen in Zweierkomplementdarstellung (n Bit, meist $n = 8, 16, 32, 64$)

- Bsp.: $n = 8$ $(100)_{10} = (64)_{16}$

0	1	1	0	0	1	0	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

MSB: most siginficant bit
(LSB: least significant bit)

- Um auch negative Zahlen darstellen zu können, wird das MSB als Vorzeichen reserviert. Negative Zahlen $-a$ $(1 \leq a \leq 2^{n-1})$ werden im sogenannten Zweierkomplement $\overline{a} := 2^n - a$ dargestellt ($\curvearrowright \overline{a} \geq 2^{n-1} \curvearrowright MSB = 1$)
- Nightnegtavie Zahlen $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$ werden unverändert dargestellt ($MSB = 0$)
- Damit Darstellung ganzer Zahlen von -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$ (Anzahl 2^n) möglich, $n = 8$: $-128 bis 127$.
- Umwandlung negativer Zahlen $\rightarrow$ Zweierkomplement

Bsp. 9: $n = 8$, umzuwandeln sei -100 (dezimal)
zwei Möglichkeiten:

1.) (für die Handrechnung): $\overline{100} = \underbrace{2^8}_{=256} - 100 = \underbrace{156}_{(9C)_{16}} =$

1	0	0	1	1	1	0	0

BEMERKUNG: Das Zweierkomplement der positiven Zahl 100 ist die positive Zahl $156 = \overline{100}$, diese wird wegen $MSB = 1$ als negative Zahl -100 interpretiert.

2.) (am schnellsten): Rechts (beim LSB) beginnend alle Ziffern bis einschließlich der ersten 1 übernehmen (unverändert lassen), für alle höherwertigen Ziffern Z das EINERKOMPLEMENT $1 - z$ bilden:

$(100)_{10} =$

0	1	1	0	0	1	0	0

1	0	0	1	1	1	0	0

$= (\overline{100})_{10} = (156)_2$

Rückumwandlung (Zahl mit $MSB = 1 \rightarrow$ neg. Zahl) analog:
$\overline{156} = 256 - 156 = 100 \rightarrow \underline{-100}$
Die Subtraktion wird damit auf die Addition des Zweierkomplements zurückgeführt.

Bsp. 10: $a = 64 - 100 = 64 + (-100)$

$$\begin{aligned} 64 = 2^6 &= 0100\,0000 \\ -100 &= 1001\,1100 \quad + \\ Summe &= 1101\,1100 \quad \text{Ergebins negativ} \\ 36 &= 0010\,0100 \quad \text{dargestellst ist aber } \overline{z} = 2^n - z \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Ergebnis: $a = -36 = -z$
Ein ÜBERLAUF (Ergebnis $\geq 2^{n-1}$ oder $< -2^{n-1}$) ensteht in folgenden Fällen ($\rightarrow$

		a	b	$a+b$	
ERROR!)	MSB	0	0	1	($MSB = 0$ erwartet!)
	MSB	1	1	0	($MSB = 1$ erwartet!)

Bemerkung: Für die Handrechnung (z.B. $2 - 5 =: a$) kleinere zahl von größerer Subtrahieren $a = -(5-2)$, dabei genügt es für n die Binärstellenzahl des Minuenden $(5)_{10} = (101)_2$ also $n = 3$ zu verwenden. Es wird dabei ausschließlich mit nicht-negativen Zahlen gerechnet $(0, 1, ..., 2^n - 1)$:
$(5-2)_{10} = ((5 + 2^n - 2) - 2^n)_{10} = (5 + \overline{2} - 2^n)_{10}$
$(2)_{10} = (010)_2 \curvearrowright \overline{2} = (110)_2$
$(5)_{10} = (101)_2$

5: 101

$\overline{2}$: 110 $+$

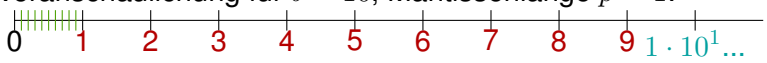
1 011

vordere Stelle 2^n ignorieren
$\curvearrowright 5 - 3 = 3 = (011)_2 \curvearrowright \underline{\underline{a = -3}}$

(2) Gleitkommasysteme
$\boxed{x = v \cdot m \cdot b^e}$ dabei

- $v = (-1)^V$ ... VORZEICHEN $\begin{cases} V = 0 & \text{positive Zahl} \\ V = 1 & \text{negative Zahl} \end{cases}$
- m ... MANTISSE, Stellenzahl p, die Mantisse heißt NORMALISIERT falls sie folgende Gestalt besitzt:
  $m_1, m_2, ..., m_p$ oder $0, m_1, m_2, ..., m_p$ mit $m \neq 0$. Dabei sind $m_1, m_2, ..., m_p$ die Ziffern zur Basis b.
- e ... EXPONENT, ganzzahlig $e_{min} \leq e \leq e_{max}$.

In jedem Gleitkommasystem sind nur endlich viele Zahlen darstellbar, die Menge der reellen zahlen ist aber überabzählbar (unendlich).
Gleitkommazahlen liegen auf der Zahlengeraden diskret verteilt (fester Exponent $\curvearrowright$ gleiche Abstände, wächst Exponent um k, so wachsen die Abstände auf b^k-fache!)
Veranschaulichung für $b = 10$, Mantissenlänge $p = 1$:



EXPONENT 0: $1 \cdot 10^0, 2 \cdot 10^0, ..., 9 \cdot 10^0$
EXPONENT -1: $1 \cdot 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, ..., 9 \cdot 10^{-1}$
EXPONENT 1: $1 \cdot 10^1, 2 \cdot 10^1, ..., 9 \cdot 10^1$
RUNDUNG: Zahlen, die nicht in diesem „Raster“ enthalten sind, werden auf dei nächstgelegene darstellbare Gleitkommazahl gerundet. Falls die Zahl genau in der Mitte zwischen zwei darstellbaren Zahlen liegt, wird auf die gerade Zahl gerundet (Bsp. $3,75 \to 3,8$ oder $4,65 \to 4,6$ bei Rundung auf eine Stelle nach dem Komma).

Numerische Probleme beim Rechnen mit Gleitkommazahlen

- Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten im allgemeinen nicht mehr. Ursachen sind bspw. Ziffernauslöschung bei der Subtraktion fast gleicher Zahlen, Addition oder Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung.

Bsp. 11:

1.) Man berechne $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ in einem System mit 3-Stelliger Mantisse: $a = 3,73 \cdot 10^6$, $b = -3,71 \cdot 10^6$ und $c = 6,42 \cdot 10^3$

- $a + b = 0,02 \cdot 10^6 = 2,00 \cdot 10^4$ (Normalisierung)
  $c = 0,642 \cdot 10^4 = 0,64 \cdot 10^4$ (Exponentenangleichung und Rundung)
  $(a + b) + c = 2,64 \cdot 10^4 = \underline{\underline{26400}}$
- $c = 0,00642 \cdot 10^6 = 0,01 \cdot 10^6$ (Exponentenangleichung und Rundung)
  $b + c = -3,,70 \cdot 10^6$
  $a + (b + c) = 0,03 \cdot 10^6 = 3,00 \cdot 10^4 = \underline{\underline{30000}}$
- exakter Wert: $a + b + c = \underline{\underline{26420}}$

2.) Aufgabe der numerischen Mathematik ist es, die unvermeidlichen Genauigkeitsverluste beim Rechnen mit Maschinenzahlen durch optimale Organisation (Reihenfolge) der Rechnung und Fehleranalyse in Grenzen zu halten.

(3) Gleitkommaformat IEEE 754 (single precision, 32 Bit)
$x = v \cdot m \cdot b^e = (-1)^V \cdot 1, m_2\, m_3 ... m_2 4 \cdot 2^{E-B}$ ($b = 2$, Binärsystenm)

- Vorzeichen $V = 0 \curvearrowright$ positiv, $V = 1 \curvearrowright$ negativ (1 Bit)
- Mantisse m_1 im Binärsystem stets gleich 1.
  $\curvearrowright$ nur Abspeicherung von $\boxed{M = m_2\, m_3 ... m_2 4}$ (23 Bit)
- Exponent: Abgespeichert wird $\boxed{E := e + B}$
  mit dem sogenannten BIASWERT $B = 127$ (Bias = Verzerrung) als nichtnegative 8-stellige Binärzahl, $e_{min} = -126$ ($E = 1$), $e_{max} = 127$ ($E = 254 = (1111\ 1110)_2$), die Grenzfälle $E = (0000\ 0000)_2$ und $E = (1111\ 1111)_2$ sind für Sonderfälle (0, ∞, nichtdefinierte Werte) vorgesehen.

Abspeicherung in der Reihenfolge $\boxed{VEM}$ (32 Bit)

Bsp. 12: Umwandlung einer Dezimalzahl in das IEEE 754-Format (32-Bit), $x = 435,9$ (vgl. Bsp. 6)

1.) Konvertierung in Dualzahl (unter Verwendung von Bsp. 6/Hexadez.)
$x = 1B3, E\overline{6})_{16} = (1\ 1011\ 0011, 1100\ 0110\ 0110 ...)_2$

2.) Normalisierte Gleitkommadarstellung, Mantisse mit 23 Stellen nach dem Komma, Kommaverschiebung um 8 Stellen.
$\curvearrowright x = 1, \underbrace{1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}_{M}(0\ 0110 ...))_2 \cdot 2^8$ (Abrundung!)

3.) Exponent $e = 8 \curvearrowright E = e + B = 8 + 127 = 135 = \underbrace{(1000\ 0111)_2}_{E}$

4.) Vorzeichenbit $V = 0$ (da x positiv)

$\curvearrowright x$: $\boxed{0\ 1000\ 0111\ 1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}$

Bsp. 13: IEEE 754$\rightarrow$ Dezimalzahl
$\boxed{1\ 1000\ 0011\ 0111\ 1100\ 0000\ 0000\ 0000\ 000}$

1.) $E = (1000\ 00111)_2 = 131 \curvearrowright e = E - B = 131 - 127 = \underline{\underline{4}}$

2.) $V = 1 \curvearrowright$ negativ, normalisierte Mantisse $1, M$
$\curvearrowright x = -(1, 011111)_2 \cdot 2^4 = -(10111, 11)_2$
$\curvearrowright x = -23,75$

Bemerkung:

1.) Neben dem single-Format gibt es in IEEE 754 das double-Format (54 Bit, V=1Bit, E=11Bit, M=52 Bit, B=1023) sowie das erweiterbare Format

2.) Zahlbereiche single: $1,401 \cdot 10^{-45}...3,403 \cdot 10^{38}$, double: $4,941 \cdot 10^{-324}...1,798 \cdot 10^{308}$

1.3.3.3 ORDNUNGSSTRUKTUR

- Durch $\leqq$ (auch $\leq$) ist auf $\mathbb{R}$ eine vollständige Ordnungsrelation erklärt.
- Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$):

  (1) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leqq y + z$

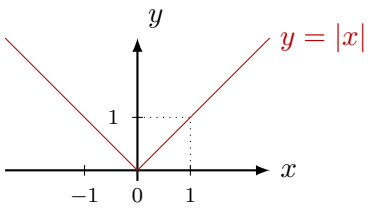
  (2) $(x \leq y) \wedge (z \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$
  $(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \geq y \cdot z$

  Für die strikte Ordnung $<$ gilt:

  $\boxed{(x < y) \wedge (z < 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot > y \cdot z}$

Def. 8:

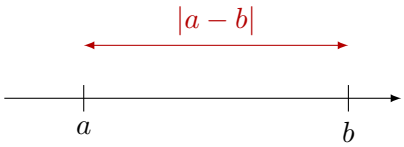
Sei x eine reele Zahl. Dann heißt $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ der (absolute) Betrag von x.



Vorzeichenfunktion $sgn(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Diskussion: Es gilt:

(1) $|a - b|$ = „Abstand der Zahlen a und b auf der Zahlengeraden“



(speziell: $|a|$ = „Abstand von a zum Ursprung“)

(2) $a = |a| \cdot sgn(a)$

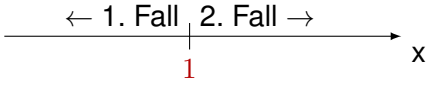
(3) $|a| = |-a|, |ab| = |a| \cdot |b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (falls $b \neq 0$)

(4) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (DREIECKSUNGLEICHUNG) für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Lösung von Ungleichung

Bsp. 14: (Ungleichung mit Beträgen)
Gesucht sei die Lösungmenge L der reellen Zahlen, die die Ungleichung $|x-1| < 3 + \frac{1}{2}x$ (*) erfüllen.

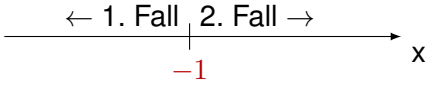
- kritische Stelle(n): Nullstellen des Terms innerhalb der Betragsstriche d.h. $x = 1 \curvearrowright$ Fallunterscheidung



- 1. Fall: $x - 1 < 0$ d.h. $x < 1$
  in (*):
  $-(x-1) < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $-\frac{3}{2}x < 2 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x > -\frac{4}{3}}}$
  $\curvearrowright L_1 = \left\{x | (x < 1) \wedge x > \frac{4}{3}\right\} = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
- 2. Fall $x - 1 \geq 0$ d.h. $x \geq 1$
  in (*):
  $x - 1 < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $\frac{1}{2}x < 4 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x < 8}}$
  $\curvearrowright L_2 = \{x | (x \geq 1) \wedge (x < 8)\} = [1, 8)$
- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{\left(-\frac{4}{3}, 8\right)}}$

Bsp. 15: (Ungleichung mit gebrochen rationalen Termen)
$\frac{x}{x+1} < 1$ (*)

- kritische Stelle(n): Nenner-Nullstellen, hier: $x = -1$.



- 1. Fall: $x < -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x > x + 1 \Leftrightarrow 0 > 1$ (Widerspruch)
  $L_1 = \varnothing$.
- 2. Fall: $x > -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x < x + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ (wahre Aussage)
  $L_2 = \{x | x > -1\} = (-1, \infty)$
- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{(-1, \infty)}}$

Bsp. 16: (quadratische Ungleichungen)

$x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow$

$\left(x + \frac{3}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} < 10 \Leftrightarrow$ (vereinfacht durch quadratische Ergännzung)

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4} \Leftrightarrow$

$\left|x + \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$ (Äquivalenz siehe Übung)

$\frac{-7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$-5 < x < 2$

$L = \underline{\underline{(-5, 2)}}$

Bemerkung:
In vielen Fällen ist auch ein graphischer Lösungsansatz möglich. Dabei sind geeignete Schnittpunkte (≙Gleichung) exakt rechnerisch zu ermitteln, ausschließend Ungleichheitszeichen betrachten.

in Bsp. 16:

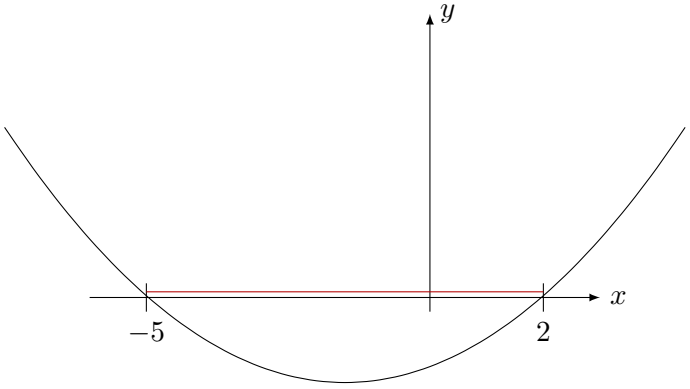
$x^2 + 3x < 10 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x_2 + 3x - 10}_{=f(x)} < 0$

Nullstellen von $f(x)$:

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

↷ Grobskizze von $y = f(x)$ (Parabel, nach oben geöffnet)



↷$L = (-5, 2)$

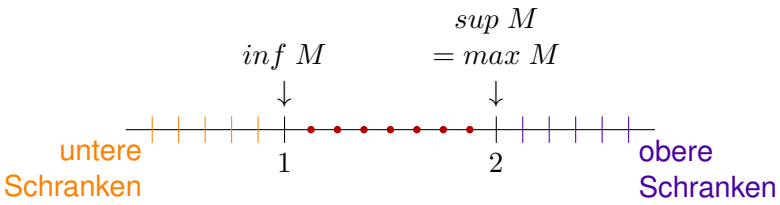
Schranken und Grenzen

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, vgl. 1.2. Man kann zeigen, dass es bei diesen Ordnungsrelationen ($\leq$) auf $\mathbb{R}$ dann auch eine kleinste obere Schranke (SUPREMUM, $sup\ M$, $s = max\ M$ falls $s \in M$)
- Analog: nach UNTEN BESCHRÄNKT, INFIMUM, MINIMUM.
- Falls M NICHT nach oben beschränkt ist, d.h. es gilt:
  $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M \quad x \leq a = \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in M \quad x > a$, dann Schreibweise $\boxed{sup\ M := \infty}$
- Analog: in $\boxed{inf\ M := -\infty}$ falls M NICHT nach unten beschränkt.
- M heißt BESCHRÄNKT, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Bsp. 17:

$$M = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- OBERE SCHRANKEN: π, 2300, 7, $2,01$ usw.
  kleinste obere Schranke: $sup\ M = 2 = max\ M$
- UNTERE SCHRANKEN: -31, 0, $0,99$ usw.
  größte untere Schranke: $inf\ M = 1$ ($1 \notin M \curvearrowright min\ M$ existiert nicht)



1.3.4 KOMPLEXE ZAHLEN

Motivation: z.B. $\boxed{x^2 + 1 = 0}$ ($\Leftrightarrow x^2 = -1$) im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar. $\curvearrowright$ Zahlenbereichserweiterung

1.3.4.1 BEGRIFF, RECHENREGELN

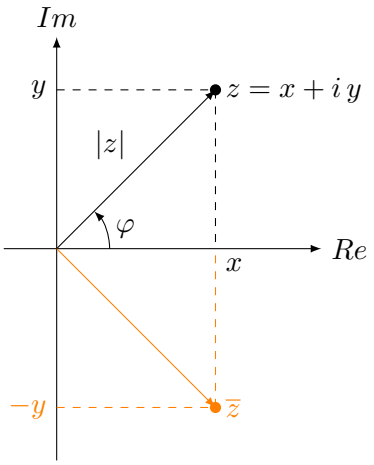
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathbb{C}$ enthält eine Zahl i mit $\boxed{i^2 = -1}$ (oft auch mit j bezeichnet)

(2) Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form $\boxed{z = x + i \cdot y}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ darstellen.
Dabei $x = Re(z)$ (Realteil) und $y = Im(z)$ (Imaginärteil)

(3) Auf $\mathbb{C}$ werden die Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) wie folgt erklärt:
Sei $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ Dann gilt:
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Die Menge $\mathbb{C}$ wird mit diesen Operationen zum KÖRPER DER KOMPLEXEN ZAHLEN. Die arithmetischen Operationen erfolgen unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Reellen.

(4) Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine natürliche Ordnungsrelation.
Veranschaulichung: GAUSSSCHE ZAHLENEBENE
Zahl $z \leftrightarrow$ Punkt $(x, y) \leftrightarrow$ Vektor $\overrightarrow{OP}$



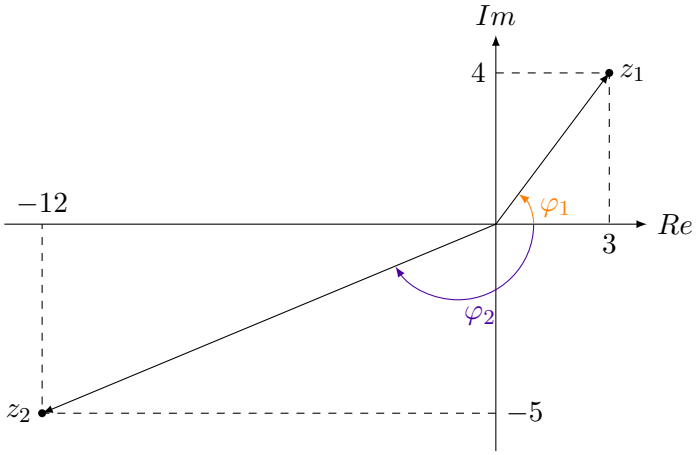
- BETRAG von z:
  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Hauptarrgument von z: orientierter Winkel zwischen positiver x-Achse und $\overrightarrow{OP}$ (gemessen auf kürzestem Wege)
  $Arg(z) := \varphi \qquad (-\pi < \varphi \leq \pi)$
- zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$:
  $\overline{z} := x - i \cdot y$

Diskussion:

- Falls nicht notwendig kürzester Weg gewählt wird: Argument $arg(z) = Arg(z) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$
  z.B. $z = 1 - i \quad : \quad Arg(z) = -45° = -\frac{\pi}{4}$, ein (Neben-)argument bspw. $arg(z) = 315°$
- Berechnung von $Arg(z)$ $(z \neq 0)$: $cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

$$Arg(z) = \begin{cases} +arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \leq 0 \\ -arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Bsp. 18:
$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$

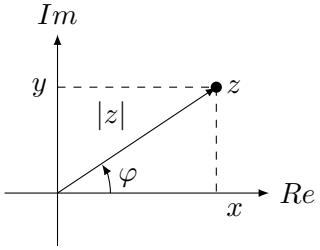


a.) Betrag und Hauptargument
$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\varphi_1 = Arg(z_1) = arccos\frac{3}{5} \approx 53,13°$
$|z_2| = 13$
$\varphi_2 = Arg(z_2) = -arccos -\frac{12}{13} \approx -157,38°$

b.) Arithmetische Operationen:
$z_1 + z_2 = -9 - i$
$z_1 - z_2 = 15 + 9i$
$z_1 \cdot z_2 = -16 - 63i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = -\frac{56}{169} - \frac{33}{169}i$

1.3.4.2 DARSTELLUNGSFORMEN KOMPLEXER ZAHLEN

- Trigonometrische Darstellung
- EULERsche Form
- exponentielle Darstellung



$\boxed{z = x + iy}$ (ARITHMETISCHE DARSTELLUNG)
$x = |z| \cdot cos\varphi$
$y = |z| \cdot sin\varphi$
$\curvearrowright \boxed{z = |z| \cdot (cos\varphi + i\ sin\varphi)}$ (TRIGONOMETRISCHE DARSTELLUNG)
(und $\varphi = arg\ z$, meist $\varphi = Arg\ z$)

Diskussion:
$z_1 = |z_1| \cdot (cos\varphi_1 + i\ sin\varphi_1)$
$z_2 = |z_2| \cdot (cos\varphi_2 + i\ sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\underbrace{(cos\varphi_1\ cos\varphi_2 - sin\varphi_1\ sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\ \underbrace{(sin\varphi_1\ cos\varphi_2 + sin\varphi_2\ cos\varphi_1)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)})$$

$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$
Folgerung:
$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$
$\boxed{arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)}$
Analog:
$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)}$
$\boxed{arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)}$
Es ist also sinnvoll zu definieren:

Def. 10:
$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + i\ sin\varphi}$ (EULERSCHE FORM)

Diskussion:

(1) EXPONENTIELLE DARSTELLUNG von z: $\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$

(2) Wegen der obigen Formeln bleiben für diese Darstellung die vom Reellen bekannnten Potenzgesetze gültig.
Insbesondere gilt die Formel von MOIVRE:
$\boxed{z^n = \left(|z| \cdot e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n \cdot e^{i\varphi n} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\ \sin(n\varphi)}$

Bsp. 19:

a.) $z_1 = \underbrace{3+4i}_{arithmetisch} = \underbrace{5 \cdot (cos53,13° + i\ \sin(53,13°))}_{trigonemetrisch} = \underbrace{5 \cdot e^{i \cdot 53,13°}}_{exponentiell}$

$z_2 = -12 - 5i = 13 \cdot (\cos(-157,38° + i\ -157,38°)) = 13 \cdot e^{-i \cdot 157,38°}$

b.) $z = -1 + i$, gesucht: z^{12}

$|z| = \sqrt{2},\ Arg(z) = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135° = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3}{4}\pi} \Rightarrow z^12 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = 2^6 \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi \cdot 12} = 64 \cdot e^{i \cdot 9\pi} = 64 \cdot e^{i\pi}$

arithmetische Darstellung: $z^{12} = 64 \cdot (cos\pi + i\ sin\pi) = \underline{\underline{-64}}$

1.3.4.3 SPEZIELLE GLEICHUNGEN

Quadratische Gleichung: $z^2 + p \cdot z + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$

quadratische Ergänzung: $\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$

1. Fall: $\frac{p}{2} - q \geq 0 \curvearrowright z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

2. Fall: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\overbrace{q - \frac{p^2}{4}}^{\widehat{=}a^2}}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(z + \frac{p}{2}\right) + i \cdot a\right) \cdot \left(\left(p + \frac{p}{2}\right) - i \cdot a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

praktisches Vorgehen:

Lösungsformel aus dem ersten Fall stets anwenden, im Fall 2 Formal $\sqrt{-1} = \pm i$.

Bsp. 20:

$z^2 + 28z + 200 = 0$

$z_{1,2} = -14 \pm \sqrt{-4} = \underline{\underline{-14 \pm 2i}}$

Kreisteilungsgleichung:

$\boxed{z^n = b}, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$

Lösung:

- b exponentiell darstellen: $b = |b| \cdot e^{i\beta} \quad , \beta = Arg(b)$
- Gleichung besitzt n Lösungen $\boxed{z_k = \sqrt[n]{|b|} \cdot e^{i\frac{\beta + k \cdot 360°}{n}}}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$

zum Beweis:

Ansatz: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n} = |b| \cdot e^{i\beta}$

Zwei Gleichungen stimmen überein, wenn jeweils der Betrag gleich und Winkel bis auf ein vielfaches von π gleich ist.

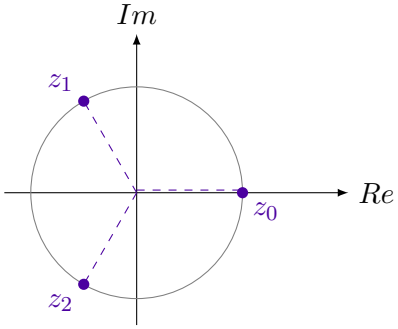
(1) $r^n = |b| \curvearrowright r = \sqrt[n]{|b|}$

(2) $\varphi \cdot n = \beta + k \cdot 360° \qquad (k \in \mathbb{Z})$
$\curvearrowright \varphi = \dfrac{\beta + k \cdot 360°}{n}$ (nur n verschiedene Argumente)

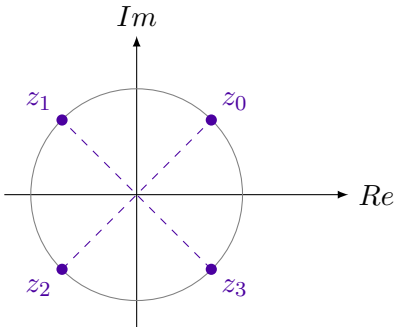
Beispiele:

a.) $z^3 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$
$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{3}} \qquad (k = 0, 1, 2)$
$z_0 = e^{i\cdot 0} = \underline{\underline{1}}$
$z_1 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\ \sin(\frac{2}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$
$z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + i\ \sin(\frac{4}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$

Allgemein: Lösungen der Gleichung $z^n = b$ teilen Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|b|}$ um 0 in n gleiche Teile.



b.) $z^4 = -16 = 16 \cdot e^{i\cdot\pi}$
$z_k = 2 \cdot e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{4}} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$
$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$
$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$
$z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$
$z_3 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$



Anwendung:
Faktorisierung des Polynoms $p(x) = x^4 + 16$

$$\begin{aligned} x^4 + 16 &= (x - z_0) \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) \\ &= (x - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x - \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) \end{aligned}$$

1.3.4.4 ANWENDUNG IM WECHSELSTROMKREIS

(1) Spule:
Stromstärke $I = I_m \cdot (\cos(\omega t) + i\ \sin(\omega t))$

Spannung $U = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot (\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$
(formale Ergänzung zu komplexer Größe)
$\curvearrowright I = I_m \cdot e^{i\omega t},\ U = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \underbrace{I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i\omega t}}_{I \cdot \omega \cdot L} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i}$

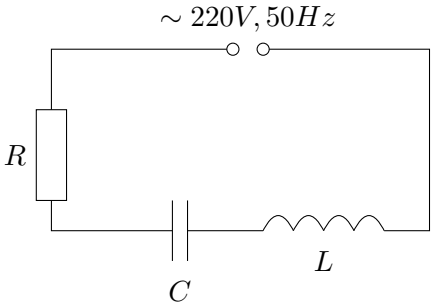
$R = \frac{U}{I} \curvearrowright \boxed{R_L = \omega \cdot L \cdot i}$ (INDUKTIVER WIDERSTAND)

(2) Kondensator:

$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot i}}$ (KAPAZITIVER WIDERSTAND)

Bezeichnung in E-Technik:
$Z := R_ges = R + i \cdot X$
Wirkwiderstand R, Blindwiderstand X, Scheinwiderstand $|Z|$, Leitwert $Y = \frac{1}{Z}$

Bsp. 22:



$R = 100\Omega, C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6}\frac{As}{V}, L = 1H = 1\frac{Vs}{A}, \omega = 2\pi \cdot \underbrace{50\frac{1}{s}}_{f}$

Gesucht ist der Gesamtwiderstand Z.
$Z = R + R_C + R_L = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$
$Z = (100 + 155,04i)\Omega = 184,44 \cdot e^{i \cdot 57,17°}\Omega$
$\curvearrowright$
Wirkwiderstand: $Re(Z) = 100\Omega$
Blindwiderstand: $Im(Z) = 155,04\Omega$
Scheinwiderstand: $|Z| = 184,44\Omega$
Phasenverschiebung: $Arg(Z) = 57,17°$

1.4 REELLWERTIGE FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

1.4.1 ELEMENTARE FUNKTIONEN (TEIL 1)

1.4.1.1 POLYNOME

Def. 1:
$y = f(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + ... + a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0$ mit $(a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ heißt ganze rationale Funktion oder POLYNOM vom Grad n (falls $a_n \neq 0$).
Zur Beschreibung der Funktionswerte zweckmäßig: HORNER-Schema
(vgl. Stellenwertsysteme 1.3.3.1)

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
x_0		$b_{n-1} \cdot x_0$	$b_{n-2} \cdot x_0$	...	$b_1 \cdot x_0$	$b_0 \cdot x_0$
	$\underbrace{\boxed{b_{n-1}}}_{=a_n}$	$\boxed{b_{n-2}}$	$\boxed{b_{n-3}}$	...	$\boxed{b_0}$	$f(x_0) = r_0$

Polynomdivision: $\frac{f(x)}{x - x_0} = b_{n-1}\, x^{n-1} + b_{n-2}\, x^{n-2} + ... + b_1\, x + b_0 + \frac{r_0}{x - x_0}$

Bsp. 1:

$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 6, \quad x_0 = 3, \quad$ ges: $f(x_0), \quad \frac{f(x)}{x - x_0}$

	1	0	-2	1	0	-6
$x_0 = 3$		3	9	21	66	198
	1	3	7	22	66	192

$f(x) : (x - 3) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 22x + 66 + \frac{192}{x - 3}$

Satz 1:
Es sei $f(x) = p_n(x) = a_n\, x^n + ... + a_0$ ein Polynom vom Grad n (d.h. $a_n \neq 0$). Dann besitzt f (in $\mathbb{C}$) genau n Nullstellen $x_1, ..., x_n$ und es gilt: $f(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$. (Zerlegung in Linearfaktoren)

Diskussion:

(1) Falls in der Linearfaktorzerlegung der Faktor $(x - x_0)$ genau k-mal ($1 \geq k \geq n$) vorkommt, so heißt x_0 k-FACHE NULLSTELLE (Nullstelle der Vielfachheit k).

(2) Nichtreelle Nullstellen sind möglich, sie treten stets paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auf ($x_0, \overline{x_0}$)). In diesem Falle Zusammenfassung der Linearfaktoren zu reellen quadratischen Faktoren möglich: $(x - x_0) \cdot (x - \overline{x_0}) = x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0 \cdot \overline{x_0} = x^2 - 2 \cdot Re(x_0) \cdot x + |x_0|^2$

(3) Falls $a_0, a_1, ..., a_n$ ganze Zahlen sind, dann sind ganzzahlige Nullstellen Teiler von a_0 (falls vorhanden).

(4) Allgemeine Methoden zur Nullstellenbestimmung später (Kap. 3 1.3.1)

Bsp. 2:

$p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6, \quad$ ges: Nullstellen

Durch Probieren $\boxed{x_1 = 2}$

mit HORNER-Schema:

	1	1	-5	1	-6	
$x_1 = 2$		2	6	2	6	
	1	3	1	3	$\boxed{0}$	$\curvearrowright p(x) = (x - 2) \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 + x + 3)}_{\text{durch Probieren } x_2 = -3}$
$x_2 = -3$		-3	0	-3		
	1	0	1	$\boxed{0}$		$\curvearrowright p(x) = (x - 2)(x + 3)\underbrace{(x^2 + 1)}_{x_{3,4} = \pm i}$

$\curvearrowright$ Zerlegung: $p(x) = (x - 2)(x + 3)(x - i)(x + i)$

1.4.1.2 GEBROCHEN RATIONALE FUNKTIONEN

Def. 2:
$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + ... + b_1\, x + b_0}$ mit $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ und $Db(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$ heißt gebrochenrationale Funktion. f heißt ECHT GEBROCHEN, falls $m < n$ und UNECHTGEBROCHEN, falls $m \geq n$.

Diskussion:

- Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen besitzen (ansonsten: Kürzen gemeinsamer Linearfaktoren von Zähler und Nenner [unter Beachtung des Definitionsbereichs])
- Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen POLSTELLEN der gebrochen rationalen Funktion (bei Polstelle x_P: $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_P$).
- Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind die Nullstellen von f.
- Verhalten von $f(x)$ bei k-facher reeller Nullstelle oder Polstelle:
  Vorzeichenwechsel $\Leftrightarrow$ k ungerade
- Polynomdivision $p(x) : q(x) = \underbrace{s(x)}_{Polynom} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{echtgebrochen}$
  $y = a(x)$ ist die sogenannte Asymptote

Bsp. 3:
$y = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)(x-2)} = x + 3 + \frac{5x+6}{x^2 - x - 2}$
Daraus lassen sich leicht erste Werte der Kurvendiskussion ableiten:

- Nullstellen: $x_{1,2} = 0$ (doppelt), $x_3 = -2$
- Polstellen: $x = -1$, $x = 2$ (einfach $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel)
- Asymptote: $y = x + 3$
  Schnittstellen und Asymptoten: $5x + 6 = 0 \curvearrowright x = -1, 2$

1.4.1.3 TRIGONOMETRISCHE FUNKTION

Übliche Definition der trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen wie $\sin() \cos()$ usw.):

Def. 3:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x) = f(+p)$ (für alle $x \in Db(f)$). Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt Periode f.

Def. 4: (Symmetrieeigenschaft)
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt:

(1) gerade (symmetrische zur y-Achse), wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in Db(f)$ gilt.

(2) ungerade (punktsymmetrisch zum Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in Db(f)$ gilt.

Diskussion:

Einige Funktionen

Funktion	Db	Periode	Symmetrie
$\sin x$	$\mathbb{R}$	2π	ungerade
$\cos x$	$\mathbb{R}$	2π	gerade
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	π	ungerade
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade

Einige wichtige Formeln:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

1.4.1.4 EXPONENTIALFUNKTION

$y = f(x) = a \ (a > 0, x \in \mathbb{R})$

- Wichtig: Potenzgesetze, z.B. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ usw.
- Besondere Bedeutung besitzt die Funktion $y = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$ mit $e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2,7182...$

1.4.1.5 HYPERBELFUNKTION

Def. 5: Hyperbolicus

- $y = \cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R})$
- $y = \coth x := \dfrac{1}{\tanh x} \quad (x \neq 0)$

Wichtig: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
Fourier: $y = \cosh x$ ist gerade, alle anderen Hyperbelfunktionen ungerade.

1.4.2 UMKEHRFUNKTIONEN

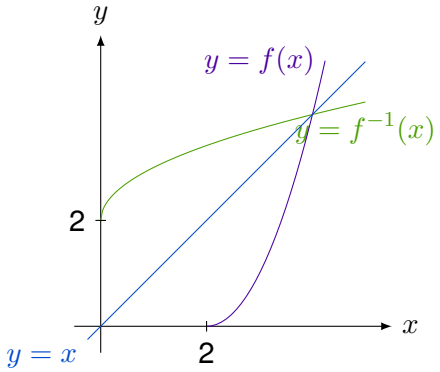
- Zur Erinnerung: $y = f(x), x \in Db(f)$ heißt injektiv (umkehrbar eindeutig), wenn es zu jedem Bild $y \in Wb(f)$ genau ein Urbild $x \in Db(f)$ mit $y = f(x)$ gibt. D.h.:
  $\underbrace{y}_{\in Wb(f)} \rightarrow \underbrace{x}_{\in Db(f)} =: f^{-1}(y)$
  Die dadurch erklärte Funktion f^{-1} („f oben -1“) ist die Umkehrfunktion von f.
  Es gilt: $\boxed{Db\left(f^{-1}\right) = Wb(f)}$, $Wb\left(f^{-1}\right) = Db(f)$

- Bilden der Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, $x \in Db(f)$:
  (1) Auflösen der Funktionsgleichung nach x: $x =: f^{-1}(y)$ (falls dies eindeutig möglich ist, andernfalls existiert f^{-1} nicht!)
  (2) Oft erfolgt anschließend eine Vertauschung von x und y:
  $y = f^{-1}(x)$, $x \in Db(f^{-1}) = Wb(f)$.
  Vertauschung entspricht geometrisch Spiegelung an der Geraden $x = y$, vgl. Bsp. 4.

Bsp. 4:
$y = f(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad , x \in [0, \infty)$

(1) Auflösen nach x: $y - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y-2)^2 = f^{-1}(y)$

(2) Vertauschen von x und y: $y = f^{-1}(x) = (x-2)^2, Db(f^{-1}) = Wb(f) = [2, \infty)$



! $Db(f^{-1})$ nur $[2, \infty)$, obwohl $(x-2)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Def. 6:
Die reellwertige Fkt. $y = f(x)$ heißt

a.) STRENG MONOTON WACHSEND, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ gilt.

b.) MONOTON WACHSEND (=nicht fallend), falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt für alle $x_1, x_2 \in Db(f)$.

c.) Analog: STRENG MONOTON FALLEND bzw MONOTON FALLEND (=nicht wachsend).

Satz 2:
f streng monoton $\Rightarrow$ f ist injektiv (d.h. f^{-1} existiert)

1.4.3 ELEMENTARE FUNKTIONEN (TEIL 2)

1.4.3.1 WURZEL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Def. 7:
$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad (x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}^*)$ ist die Umkehrfunktion zu $y = x^n \quad (x \in [0, \infty))$

Diskussion:

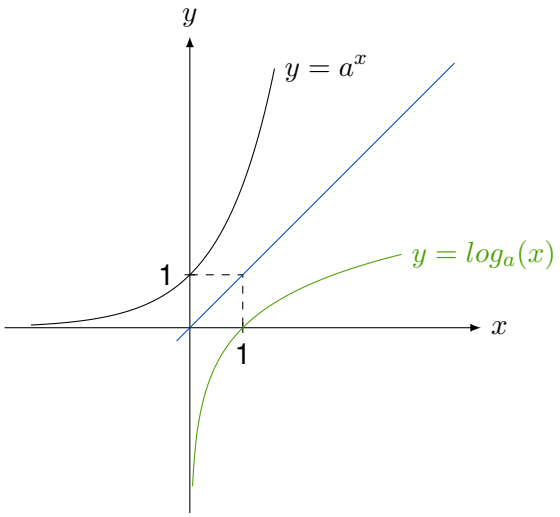
(1) Im Bereich der reellen Zahlen ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ erklärt, der Funktionswert ist selber nicht negativ.

(2) Lässt man in $x^{\frac{1}{3}}$ negative x zu (etwa $\sqrt[3]{-8} = -2$), so ergeben sich Widersprüche:
z.B.: $\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow -2 = -8^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$

(3) Es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Def. 8:
$y = log_a(x) \quad (a > 0 \wedge a \neq 1, x \in (0, \infty))$ ist Umkehrfunktion zu $y = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$.
Speziell:

- $lg(x) := log_{10}(x)$
- $ln(x) := log_e(x)$



Diskussion:

(1) Log-Gesetze:

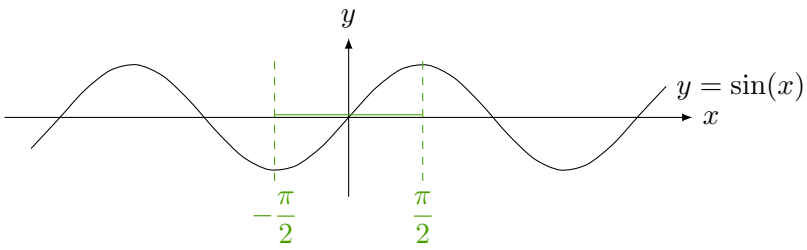
$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$$
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$
$$log_a(x^\alpha) = \alpha\ log_a x$$
$$log_c b = \frac{log_a b}{log_a c}$$

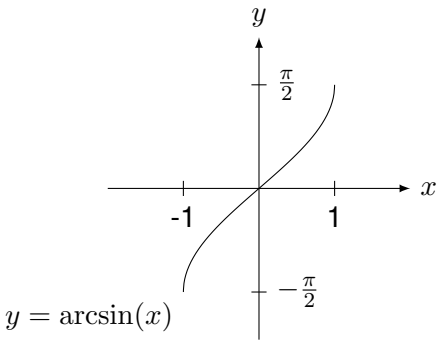
(2) Es gilt $x = a^{log_a x} \qquad (f(f^{-1}(x)) = x \forall y \in Db(f^{-1}))$

(3) Ferner gilt $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln\ a}$

1.4.3.2 ARCUSFUNKTIONEN

Vorbetrachtung: $y = f(x) = sin\ x (x \in \mathbb{R})$ ist nicht injektiv, also existiert keine Umkehrfunktion.
Aber: $y = \sin(x)$, eingeschränkt auf z.B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist injektiv und damit umkehrbar.





Def. 9:
Umkehrfunktionen

	Db	Wb	Umkehrfunktion von ...	
$y = arcsin\ x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = sin\ x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$y = arccos\ x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$y = cos\ x$	$0 \leq x \leq \pi$
$y = arctan\ x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$y = tan\ x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$y = arccot\ x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$y = cot\ x$	$0 < x < \pi$

Bsp. 5:
Gesucht sind alle Lösungen der folgenden Gleichung: $tan(2x) = y$
Es sei $2x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, mit $k \in \mathbb{Z}$.
$y = tan(2x) = tan(2x - k \cdot \pi)$ mit $2x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow 2x - k\pi = arctan(y) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{arctan(y) + k\pi}{2}}}$

1.4.3.3 AREAFUNKTIONEN

Def. 10:
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

	Db	Wb	Umkehrfunktion von ...	
$y = \text{arcsinh}\ x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = \sinh\ x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \text{arccosh}\ x$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$y = cosh\ x$	$x \geq 0$
$y = \text{arctanh}\ x$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$y = tanh\ x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \text{arccoth}\ x$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = coth\ x$	$x \neq 0$

Aus der Def. der Hyberbelfunktionen (Def. 5) folgt:
$\text{arcsinh}\ x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\text{arctanh}\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$
$\text{arccosh}\ x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$
$\text{arccoth}\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$

1.5 LINEARE ALGEBRA

1.5.1 VEKTORRÄUME

Begriff:

(1) Gegeben seien ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente SKALARE heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ (V... Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$... Vektoraddition).

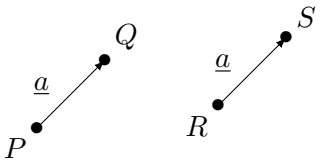
(2) Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in V die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x$ in V mit folgenden Eigenschaften zuordnet.

- Distributivgesetze:
  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$
  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- Assoziativgesetz:
  $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
- Neutrales Element:
  $1 \odot x = x$

(für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in V$)

Eine Menge V mit den in 1.) und 2.) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt VEKTORRAUM (VR) ÜBER K.
Bemerkung: Schreibweise meist $+$ anstelle von $\oplus$ und $\cdot$ anstelle von $odot$ (ergibt sich aus Zusammenhang der Elemente).

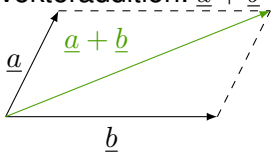
Bsp. 1:
Skalarbereich $\mathbb{R}$.
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translatimen).



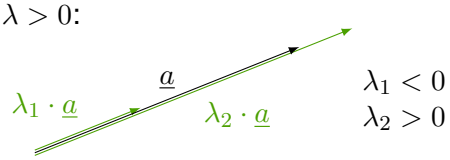
Pfeile als Repräsentanten eines Vektors $\underline{a}$.
Bezeichnung: $\underline{a} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Ortskurven: Angeheftet in gemeinsamen Anfangspunkt O (Ursprung).

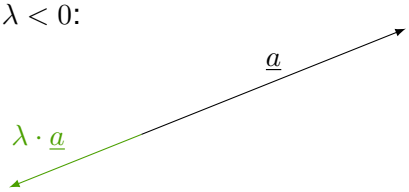
- Vektoraddition: $\underline{a} + \underline{b}$



- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \underline{a}$:
  $\lambda > 0$:

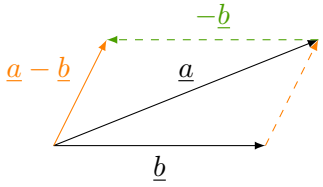


$\lambda < 0$:



Länge von $\lambda \cdot \underline{a}$ ist das $|\lambda|$-fache der Länge von $\underline{a}$.

- Subtraktion: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} + ((-1) \cdot \underline{b})$



- Nullvektor: $\underline{0}$ (Länge 0, keine Richtung)

Bsp. 2:

$$K = \mathbb{R}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

$\curvearrowright V$ Vektorraum über $\mathbb{R}$, Bezeichnung: $\mathbb{R}^n$, Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Def. 1:
Die Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ heißen LINEAR UNABHÄNGIG, wenn die Gleichung $\boxed{x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion:

(1) $x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n$ heißt LINEARKOMBINATION (LK) der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

(2) Falls es eine darstellung der Gestalt wie in Def. 1 gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ LINEAR UNABHÄNGIG.
In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Def. 2:
Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge ALLER LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1. $L(V_1)$ ist die sogenante LINEARE HÜLLE von V_1.

Bemerkung:
$L(V_1)$ ist selbst ein Vektorraum, nämlich der von V_1 aufgespannte Teilraum von V (kleinster VR, welcher V_1 enthält).

Def. 3:

- Ein Vektorraum V heißt N-DIMENSIONAL, wenn es n linear unabhängige Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen ($L(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n\}) = L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n) = V$).
- Die Menge der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion:
In einem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, stets gleich (Dimension des VR).

Satz 1:
Es sei $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ eine Basis des VRs V. Dann gibt es für JEDES $\underline{x} \in V$ eine EINDEUTIGE Darstellung der Gestalt $\underline{x} = x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$.

Bemerkung:

- Die Koeffizienten $x_1, ...x_n$ heißen KOORDINATEN von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.
- Die Summanden $x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$ heißen KOMPONENTEN von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

Bsp. 3:
Die Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\curvearrowright \underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$ sind linear unabhängig. Ferner gilt für beliebiges $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + ... + x_n \cdot \underline{e}_n$.

Bsp. 4:
Zwei Vektoren $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ und $\underline{a}_2 \neq \underline{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

1.5.2 MATRIZEN

Def. 4:
Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt MATRIX VOM TYP (m, n).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \text{ (Zeilenindex)} \\ j=1,...,n \text{ (Spaltenindex)}}}$$

Def. 5 Rechenoperationen

(1) $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{B} = (b_{ij})$ seien vom gleichen Typ (m, n).
$\boxed{\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})}$ ADDITION VON MATRIZEN

(2) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (m, n).
$\boxed{\lambda \cdot \underline{A} = (\lambda \cdot a_{ij})}$ MULTIPLIKATION EINER MATRIX MIT EINEM SKALAR

(3) $\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ (m, n)
$\underline{B} = (b_{ij})$ sei vom Typ (n, p)
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge VERKETTET (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$).

$$\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,...,m \\ k=1,...,p}}}$$ MATRIZENMULTIPLIKATION

Das Produkt ist also vom Typ (m, p).

Diskussion:
Zweckmäßig FALK-Schema zur Matrizenmultiplikation (vgl. folgendes Bsp. 5).

Def. 6
Die aus der (m, n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-Matrix heißt TRANSFORMIERTE von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^T$.

Bsp. 5:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a.) $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedliche Typen).

b.) $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c.) $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d.) $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ existiert nicht ($(2,3)$ und $(2,2)$ nicht verkettet)

f.) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 21 & 30 & 17 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(mit FALK-Schema:)

		3	6	4
		-2	0	1
5	-3	21	30	17
1	4	-5	6	8

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!

Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

(1) Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.
Bsp: $V = \{\text{Matrizen vom Typ } (2,2)\}$
Basis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:

- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ (Assoziativgesetz)
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ (Distributivgesetze)
- $(\lambda \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \underline{B})$
- $(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \qquad \left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \qquad \boxed{(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B} \cdot \underline{A}^T}$

(3) Achtung: Im Allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$!

(4) FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{A} \cdot \underline{BC}$

	$\underline{B}$	$\underline{C}$
$\underline{A}$	$\underline{A} \cdot \underline{B}$	$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$

oder

	$\underline{C}$
$\underline{B}$	$\underline{B} \cdot \underline{C}$
$\underline{A}$	$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$

(2 Varianten, gemäß Assoziativgesetz)

Spezielle Matrizen

(1) QUADRATISCHE MATRIZEN: Typ (n,n)
Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt

a) SYMMETRISCH, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt.

b) obere DREIECKSMATRIX, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
untere DREIECKSMATRIX, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

c) DIAGONALMATRIX, wenn $a_i j =$ für $i \neq j$.

d) EINHEITSMATRIX $\underline{E}$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ (spezielle Diagonalmatrix).

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(2) NULLMATRIX $\underline{0}$ (sämtliche Elemente 0, nicht notwendig quadratisch).

(3) Matrizen vom Typ $(n, 1)$ (n Zeilen, eine Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ (vgl. 1.5.1)}$$

Es ist $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ vom Typ $(1, n)$ (Zeilenvektor).

Diskussion:

(1) Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation von Matrizen einen (nicht kommutativen) Ring.

(2) Für quadratische Matrizen $\underline{A}$ sind Potenzen bildbar:

$$\boxed{\underline{A}^0 = \underline{E} \quad \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n-\text{Faktoren}}, n \in \mathbb{N}}$$

(3) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$
$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$
$\underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0}$
$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$
$\underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$
(analog 0 und 1 bei den reellen Zahlen)

(4) Sei $\underline{A}$ vom Typ (m, n), $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$.
Dann ist $\boxed{\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}}$ vom Typ $(m, 1)$.
Durch die Zuordnung $\underline{x} \longmapsto \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ wird eine LINEARE ABBILDUNG von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben (Fkt. f heißt linear, wenn gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in Db(f)$ gilt).

1.5.3 DETERMINANTEN

Def. 7:
Jeder n-reihigen quadratischen Matrix ist eindeutig eine Zahl $det\ \underline{A}$, die sogenannte DETERMINANTE von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet.
$n = 1$: $det\,((a_{11})) := a_{11}$

$$n \geq 2\text{: } det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \right) := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} det\ U_{ij}$ die ADJUNKTE des Elements a_{ij}.
U_{ij} ist die $(n-1)$-reihige (UNTER-)MATRIX, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\underline{A}$ ernsteht.

Bezeichnung: $det(\underline{A}) = det\left(\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bsp. 6:

a.) $n = 2$:
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21}$
$= \underline{\underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$

b.) $n = 3$:
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12} + a_{21} + a_{33})$

(Alternativ auch: Regel von SARRUS [diese gilt NUR für 3-reihige Determinanten] $\Rightarrow$ (Summe der Produkte der Diagonalen nach rechts unten)-(Summe der Produkte der Diagonalen nach links unten))

Satz 2:

a.) $det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$

b.) $det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T)$

Wegen Satz 2b gelten für alle folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften auch sinngemäß für die Spalten.

Satz 3: (Eigenschaften der Determinante)

(E1) $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, dann gilt $det(\underline{B}) = -det(\underline{A})$.

(E2) Es gilt $det(\underline{A}) = 0$ falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.

(E3) Es gilt $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ \lambda a_{i1} & ... & \lambda a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ (steht ein Faktor in einer Zeile einer Determinante, so kann er auch vorgezogen werden).

(E4) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.

(E5) $det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile, $(i = 1, ..., n)$)

$det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (Entwicklung nach j-ten Spalte, $(j = 1, ..., n)$)

$\rightarrow$ ENTWICKLUNGSSATZ

Bsp. 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Spalte = Arbeitsspalte (bleibt unverändert)
Um in der untersten Spalte mehr Nullen zu erzeugen (mit Regel E4):
$S_{1,neu} := S_1 + 6 \cdot S_3$
$S_{2,neu} := S_2 + 2 \cdot S_3$
$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nun kann mit der letzen Zeile relativ einfach die Determinante berchnet werden:

$$= (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

Auf gleiche Weise werden nun wieder in Zeilen Nullen erzeugt:
$Z_{2,neu} := Z_2 - 4Z_1$
$Z_{3,neu} := Z_3 + 2Z_1$
$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E3}{=} (-1) \cdot (-36) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36 \cdot 9 = \underline{\underline{324}}$$

Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), dann mit Entwicklungssatz lösen (E5).

Anwendungen

(1) Vekotorrechnung in $\mathbb{R}^3$ (vgl. später, Abschnitt 1.5.5)

(2) Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem (n Gleichungen, n Unbekannte)

Matrixform $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ mit $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Diese Matrixform besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $det(\underline{A}) \neq 0$.

In diesem Falle gilt $\boxed{x_j = \frac{det(\underline{B}_j)}{det(\underline{A})}}$ $(j = 1, ..., n)$. Wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem man die j-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt (CRAMERSCHE REGEL, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen zur Lösung der Matrixform vgl. folgenden Abschnitt).

1.5.4 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME, RANG EINER MATRIX, INVERSE

1.5.4.1 DAS AUSTAUSCHVERFAHREN

Gegeben sei System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Veränderlichen $y_1, ..., y_n$.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{10} \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a22x_2 + ... + a2nx_n + a_{20} \\ &... \\ y_m &= a_{m1}x_1 + am2x_2 + ... + amnx_n + a_{m0} \end{aligned}$$

Bsp. 8:
Betrieb, in Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$:
a_{ij}... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen.
a_{i0}... Fixkosten in Abteilung i.
x_j... produzierte Mengen von P_j.
y_i... Gesamtkosten in Abteilung i.

Matrix-Schreibweise: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix}$

Tabellenform:

	x_1	x_2	...	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_{10}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_{20}
...	...				
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_{m0}

bzw.

	x^T	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

Aufgaben:

(1) $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar!).

(2) $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar).

Lösungsprinzip:
Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus, Austauschschritt AS $(y_r \leftrightarrow x_s) \rightarrow$ AUSTAUSCHVERFAHREN.
Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet:

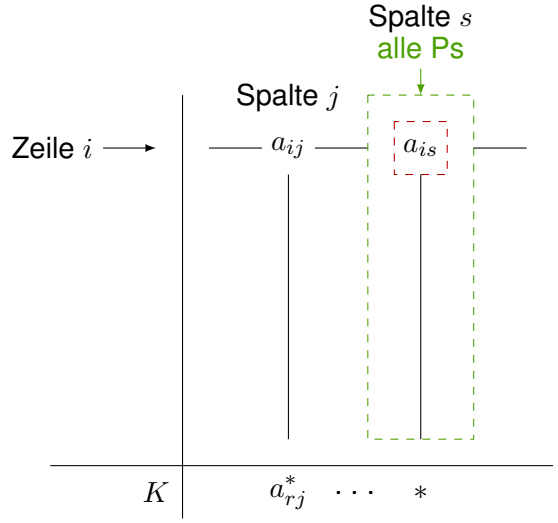
(1) r-te Zeile $y_r = ...$ nach x_s auflösen $x_s = ...$

(2) in allen anderen Zeilen x_s durch die rechte Seite vom obigen x_s ersetzen.
$\curvearrowright$ neue Tabelle

FOLIEN IM NETZ (Neumann)
Praktisches Vorgehen:

(1) Pivotelement (Pivot) kennzeichnen $\circ$

(2) Austauschregeln Austauschregel (AR) 1 bis AR 4 abarbeiten
Dabei für AR 4 unter der alten Tabelle die neue Pivotzeile (PZ) als Kellerzeile notieren.



$a^*_{ij} = a_{ij} + a_{is} \cdot a^*_{rj}$ (Rechteckregel)

Bsp. 8 (Fortsetzung)
$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 50$ (Kosten in Abt. 1)
$y_2 = x_1 + 2x_3 + 40$ (Kosten in Abt. 2)

T_1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	2	3	1	50
y_2	1	0	2	40
K	-2	-3	*	-50

T_2	x_1	x_2	y_1	1
x_3	-2	-3	1	-50
y_2	-3	-6	2	-60
K	*	-2	$\frac{2}{3}$	-20

T_3	y_2	x_2	y_1	1
x_3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-10
x_1	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	-20

d.h.:
$x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$

$\curvearrowright$ bei vorgegebenen Kosten y_1, y_2 ist die Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar.

z.B. $y_1 = 600,\ y_2 = 300$:
$x_2 = t$ (FREI WÄHLBAR)
$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 300 + t - \frac{1}{3} \cdot 600 - 10 = t - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 300 - 2t + \frac{2}{3} \cdot 600 - 20 = 280 - 2t$
$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}$

hier für $x_i \geq 0$: $10 \leq t \leq 140$.

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

(1) AVZ ... Austauschverfahren mit ZEILENTILGUNG, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen.

(2) AVS ... Austauschverfahren mit SPALTENTILGUNG, d.h. neue Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der weggelassenen Spalte = Null ist, siehe folgender Abschnitt).

(3) AVSZ ... AVZ+AVS gleichzeitig.

1.5.4.2 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, ..., x_n$)
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
- Gleichungssystem heißt HOMOGEN, falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, sonst UNHOMOGEN.
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$
- Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \cdot 1$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$
  Hilfsgrößen $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$
- Tabellenform:

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$

Lösungsprinzip:
Austauschverfahren, Variante AVS (da $y_i = 0$: Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen!)
Fall 1:
Alle y_i sind austauschbar $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar.

z.B.:

TE	x_3	1
x_1	0	4
x_2	2	-3

$\curvearrowright x_1 = 4, \quad x_2 = 2x_3 - 3$ (x_3 frei wählbar)

Fall 2:
Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar.

$\curvearrowright$ Tabelle:

	(evtl.) noch nicht ausgetauschte x_j	1
...		
y_i	0...0...0	α
...		

$\curvearrowright y_i = \alpha$

Fall 2a: $\alpha = 0$
Zeile y_i kann gestrichen werden ($0 = 0$).
Fall 2b: $\alpha \neq 0$
Gleichungssystem nicht lösbar (Widerspruch, da $y_i = 0$)

Das Verfahren endet also im Fall 2b (unlösbar) oder mit einer Tabelle, in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 oder 2a).

TE	x_{S1}	x_{S2}	...	x_{Sq}	1
x_{r1}	...				
x_{r2}	...				
...					
x_{rp}	...				

$x_{S...}$: NBV ... NICHTBASISVARIABLEN (nicht ausgetauschte x_i)
$x_{r...}$: BV ... BASISVARIABLEN (ausgetauschte x_i)

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle: NBV beliebig vorgeben, BV daraus berechenbar.
- Falls keine NBV vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

Def. 8:
Die Darstellung der Endtabelle heißt Basisdarstellung des lin. Gleichungssystems.
Bemerkung: Aus einer Basisdarstellung lassen sich weitere Basisdarstellungen durch Austausch $x_{ri} \leftrightarrow x_{sj}$ gewinnen.

Bsp. 9
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

T1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	3	1	2	2
y_2	-5	-3	-2	2
y_3	1	3	-2	10
K	-3	*	-2	-2

mit AVS:

T2	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	4	4	8
0	-8	-8	-16
K	*	-1	-2

T3	x_3	1
x_2	1	4
x_1	1	-2
0	0	0

(in T3 kann letzte 0-Zeile gestrichen werden)
$\curvearrowright$ T3 ist Endtabelle (BV: x_1, x_2, NBV: x_3)
allg. Lösung:
$x_2 = x_3 + x_4$
$x_1 = -x_3 - 2$
$x_3 \in \mathbb{R}$ frei wählbar
andere Form: $x_3 = t$ (Parameter), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ Bemerkung:

(1) Bei homogenen System $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht geschrieben werden (nur „gedacht“).

(2) Die Methode AVS entspricht dem sogenannten GAUSS-JORDAN-VERFAHREN.
Der GAUSS-ALGORITHMUS (siehe folgendes Beispiel):

- AVSZ (Spalten- und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken ($\rightarrow$ Kellerzeilen)
- Rückrechnung durchführen

Bsp. 10:

$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

T_1	x_1	x_2	x_2	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	$\boxed{1}$	-1	+3
x_2	-2	*	4	-3

T_2	x_1	x_3	1
0	$\boxed{5}$	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	*	2	-2

T_3	x_3	1
0	$\boxed{6}$	-3
x_3	*	$\frac{1}{2}$

Rückrechnung:
$T_3 \curvearrowright x_3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
$T_2 \curvearrowright x_1 = \underline{\underline{2x_3 - 2}} = \underline{\underline{-1}}$
$T_1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$

Lösung: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Bemerkung:
m Gleichungen, n Unbekannte
$m \leq n \quad \curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n \quad \curvearrowright$ Gauß oder AVS

1.5.4.3 WEITERE ANWENDUNGEN DES AUSTAUSCHVERFAHRENS

(1) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.

Ansatz: $\boxed{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ (Spalten von $\underline{A}$ sind die (Spalten-)Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$). Homogenes GLS mit AVS mit Starttabelle:

	$\underline{x}^T$
$\underline{y}$	A

- Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können.
- Allgemein: Die zu den ausgetauschten x_i, d.h. BV, gehörenden a_i sind unabhängig. Sie bilden die Basis von $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

(2) Rang einer Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ... $rang(\underline{A})$ (auch: $rank(\underline{A}), rk(\underline{A}), ...$)

Def.: $\boxed{rang(\underline{A}) := dim\ L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)}$
(Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes).

Berechnung: $rang(\underline{A})$ =Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit

	x^T
$\underline{y}$	A

als Starttabelle (1-Spalte entfällt).
Bemerkung: Es gilt $rang(\underline{A}^T) = rang(\underline{A})$.

(3) Berechnung der Determinante einer (n,n)-Matrix (vgl. Merkblatt „Lineare Algebra“)

1.5.4.4 DIE INVERSE EINER (N,N)-MATRIX

Def. 9:
Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n,n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ EINDEUTIG nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die (n,n)-Matrix $\underline{B}$ INVERSE von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$. Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ REGULÄR, sonst SINGULÄR.
Bemerkung:

(1) $\boxed{\underline{A} \text{ ist regulär}} \Leftrightarrow \boxed{det\,\underline{A} \neq 0}$

(2) $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\boxed{\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}}$.

Rechenregeln: Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ regulär. Dann gilt:

- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$
- $\left(\underline{A}^{-1}\right)^{-1} = \underline{A}$
- $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$
- $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
- $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^T$

Verfahren zur Ermittlung der Inversen:

- vollständiges AV mit Starttabelle

	$\underline{x}^T$
y	$\underline{A}$

  Fall 1: alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ regulär.
  Fall 2: nicht alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ singulär.
  im Fall 1: $\curvearrowright$ nach Ordnen der Zeilen und Spalten: $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar.
- Probe: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Bsp. 11:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht: $\underline{A}^{-1}$ (falls diese existiert).

Lösung:

T_1	x_1	x_2	x_3
y_1	1	2	1
y_2	1	0	2
y_3	1	-1	1
K	*	-2	-1

T_2	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-2	-1
y_2	1	-2	1
y_3	1	-3	0
K	-1	2	*

T_3	y_1	x_2	y_2
x_1	2	-4	-1
x_3	-1	-2	1
y_2	1	-3	0
K	$\frac{1}{3}$	*	0

T_4	y_1	y_3	y_2
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$$\curvearrowright \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$

1.5.5 VEKTORRECHNUNG IM RAUM

1.5.5.1 KARTESISCHE BASIS

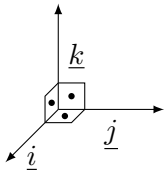
Einige Begriffe:

(1) BETRAG eines Vektors $\underline{a}$: Länge des Pfeils, der $\underline{a}$ repräsentiert.
Bezeichnung: $|\underline{a}|$

(2) EINHEITSVEKTOR: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$.

(3) zu $|\underline{a}| \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\boxed{\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}}$

(4) KARTESISCHE BASIS $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ besitzen Betrag 1, stehen $\perp$ aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubregel: Rechtsschraube $\perp$ zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen. $\curvearrowright$ Bewegung in Richtung $\underline{k}$).

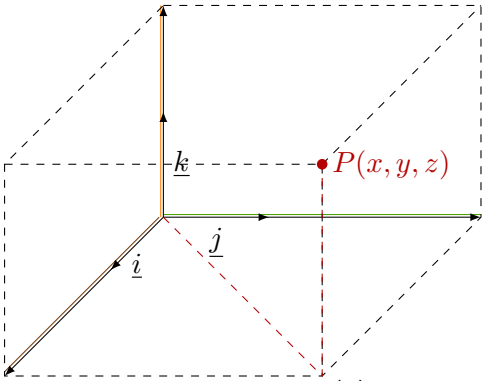


(5) KARTESISCHES KOORDINATENSYSTEM:

- Fester Punkt O als Ursprung
- kartesische Basis $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ (jeweils linear unabhängig)

Damit eineindeutige Zuordnung:

$$\underset{\text{Punkt}}{P} \overset{1}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} \underset{\text{Ortsvektor}}{\overrightarrow{OP}} = \underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$



$$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ (Kurzschreibweise – beide Schreibweisen gleichberechtigt)

Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $\boxed{|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Bemerkung:

Bezeichnung auch $\underline{e_1} = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x} = \overrightarrow{x} = \mathbf{x}$

1.5.5.2 DAS SKALARPRODUKT

Def. 10:
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi)$ heißt SKALARPRODUKT der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Eigenschaften des Sklarproduktes:

a.) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$

b.) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)

c.) $(\lambda\,\underline{a} + \mu\,\underline{b},\ \underline{c} = \lambda \cdot (\underline{a}, \underline{c}) + \mu(\underline{b}, \underline{c})$ (Linearität)

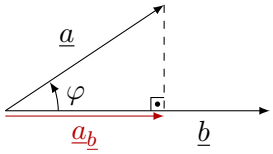
Satz 4:
Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$.

Folgerung: $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}}$

Schreibweisen: $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \circ \underline{b} = ...$

Anwendungen:

(1) Projektion $\underline{a}_{\underline{b}}$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$: $\boxed{\underline{a}_{\underline{b}} = (\underline{a}, \underline{b}^0)\underline{b}^0 = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2}\underline{b}}$



Herleitung:
$|\underline{a}_{\underline{b}}| = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi)$
$\underline{a}_{\underline{b}} = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi)\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi)\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|^2} = (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \frac{1}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$

(2) Winkel φ zwischen zwei Vektoren: $\boxed{\cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$

Bsp. 12:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$$\cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}\right) \approx 15,92^\circ$$

b.) Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$: $\underline{ba} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \frac{29}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14}\underline{e}_1 - \frac{29}{7}\underline{e}_2 + \frac{29 \cdot 3}{14}\underline{e}_3$

(3) ORTHOGONALITÄTSKRITERIUM:

$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\underbrace{|\underline{a}| = 0}_{\underline{a}=} \vee \underbrace{|\underline{b}| = \underline{0}}_{\underline{b}=\underline{0}} \vee \cos(\varphi) = 0)$

Vereinbarung: $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright$ $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{a} \perp \underline{b}}$

1.5.5.3 DAS VEKTORIELLE PRODUKT

Def. 11:

Das vektorielle Produkt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

(1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\varphi)$

(2) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$.

(3) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften des vektoriellen Produktes:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda\underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda\underline{b})$
- Speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$
- $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \ \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ usw.

Satz 5:

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} \underset{\text{Schema}}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \widehat{=} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 13:

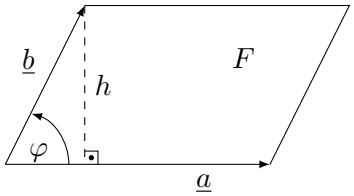
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \underline{k} = -2\underline{i} - 7\underline{j} - 4\underline{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a}) = 0,\ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{b}) = 0$!

Anwendungen:

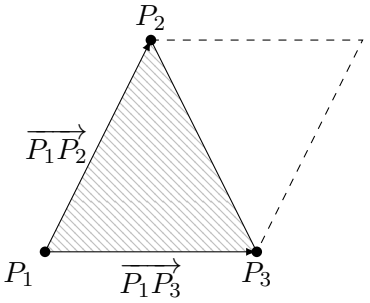
(1) FLÄCHENINHALT des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannte PARALLELOGRAMMS: $\boxed{F = |\underline{a} \times \underline{b}|}$



$\sin(\alpha) = \dfrac{h}{|\underline{b}|}$

$F = |\underline{a}| \cdot h = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\alpha) = |\underline{a} \times \underline{b}|$

(2) Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$: $\boxed{F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right|}$ (halbes Parallelogramm)



(3) PARALLELITÄTSKRITERIUM: $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow |\underline{a} \times \underline{b}| = 0 \Leftrightarrow (|\underline{a}| = 0 \vee |\underline{b}| = 0 \vee \sin(\varphi) = 0)$
Vereinbarung: $\underline{0}$ || zu jedem Vektor
$\curvearrowright \boxed{\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a} || \underline{b}}$

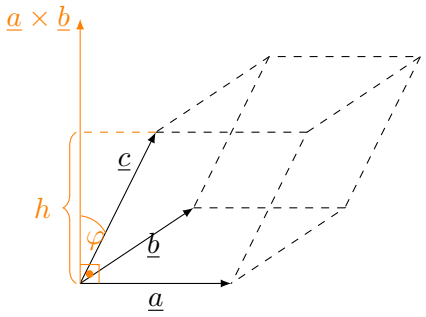
1.5.5.4 DAS SPATPRODUKT

Def. 12:
Die Zahl $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$.
Eigenschaften: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{b} \times \underline{c}, \underline{a}) = (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{b})$ (durch zyklisches Vertauschen)

Berechnung: $\boxed{(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = det(\underline{a}|\underline{b}|\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

Anwendung:

(1) Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotop): $\boxed{V = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|}$



$V = F_{\text{Grundfläche}} \cdot h = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |\cos(\alpha)| = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$

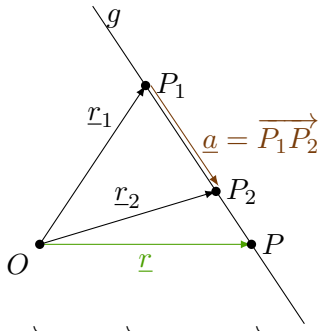
Bemerkung:

Spatprodukt $\begin{cases} > 0 & \text{... Rechtssystem} \\ < 0 & \text{... Linkssystem} \end{cases}$

(2) KOMPLANARITÄTSKRITERIUM:
Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in einer (in O angehefteten) Ebene
$\Leftrightarrow \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0$
$\Leftrightarrow$ $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear abhängig.

1.5.5.5 GERADEN- UND EBENENGLEICHUNGEN

(1) Parameterdarstellung einer Geraden g durch P_1 und P_2:
$P \ldots$ beliebiger Punkt von g



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R})$

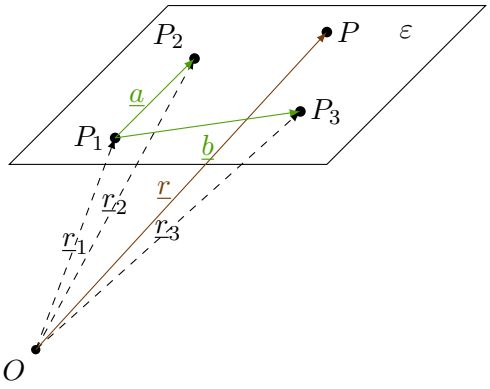
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot \underline{a}}$ (Punkt-Richtungs-Form)

$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} \quad (t \in \mathbb{R})$ (Zwei-Punkte-Form)

Bsp.:
Gerade durch die Punkte $P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (0, 1, 4)$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(2) Parameterdarstellung einer Ebene ε durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen.



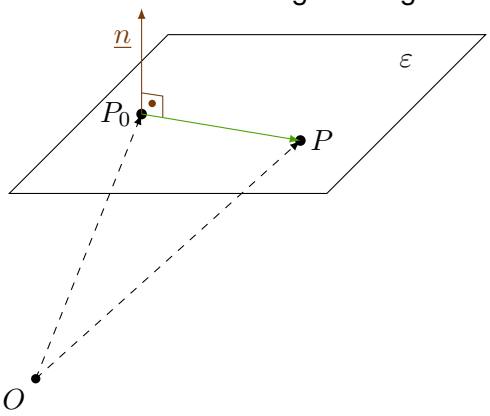
P ... beliebiger Punkt von ε

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot \underline{a} + v \cdot \underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + v(\underline{r}_3 - \underline{r}_1)}$

(3) Parameterfreie Ebenengleichung



Normalenvektor $\underline{n}$ ($\underline{n} \neq 0,\ \underline{n} \perp \varepsilon$):

$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$

Dabei sei $P(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in ε und $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt in ε mit Orthogonalitätskriterium $(\underline{n}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$ bzw. $\boxed{(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0}$.

Ausführlich: $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$, d.h. $a \cdot (x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Allgemeine Form: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ mit $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Bsp. 15:

Ebene durch $P_1(1, 0, 0), P_2(3, 1, 5), P_3(-2, 0, 2)$

- P.d. (Parameterdarstellung) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}} + v \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

- Ein Normalenvektor ist bpsw. $\underline{u} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $\curvearrowright$ Parameterfreie Darstellung: $2x - 19y + 3z + d = 0$
  d berechnen: Einsetzen von $x = 1, y = z = 0$ (P_1) liefert $2 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$
  $\curvearrowright \boxed{2x + 19y + 3z - 2 = 0}$

1.5.5.6 EINIGE GEOMETRISCHE GRUNDAUFGABEN

(1) Schnitt von Gerade und Ebene

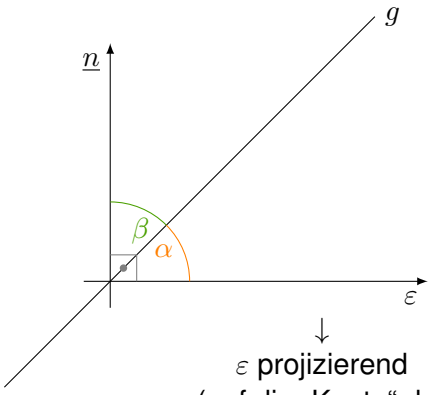
Bsp. 16:
Gegeben:
Ebene ε: $2x - 4y + z + 3 = 0$
Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Gesucht:

a.) Schnittpunkt (Spurpunkt) $S(x_S, y_S, z_S)$

b.) Schnittwinkel

zu a.) $g : x = 3-t,\ y = t,\ z = 1-2t$ einsetzen in Ebenengleichung: $2(3-t)-4\cdot t+1-2t+3 = 0 \Rightarrow -8t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$
$t = \frac{5}{4}$ in Geradengleichung einsetzen: $x_S = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, y_S = \frac{5}{4}, z_S = 1 - 2\frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$
$\curvearrowright \underline{\underline{S\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)}}$

zu b.) Schnittwinkel:



$\downarrow$
ε projizierend
(auf die „Kante“ der
Ebene blickend)

$\beta = \measuredangle(\underline{n}, \underline{a})$ (Richtungsvektor von g)
$\alpha = |90° - \beta|$
$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = arrcos\left(\frac{(\underline{n}, \underline{a})}{|\underline{n}| \cdot |\underline{a}|}\right) \approx 135,45°$
$\curvearrowright \alpha = |90° - \beta| \approx 45,45°$

(2) Schnitt zweier Ebenen: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte

Bsp. 17:

Schnitt der Ebenen $\varepsilon_1: \; x+y+z-1=0$ und $\varepsilon_2: \; x-2y+3z+4=0$.

Austauschverfahren:

T_1	x	y	z	1
0	1	1	1	-1
0	1	-2	3	4
K	*	-1	-1	1

T_2	x	z	1
x	-1	-1	1
0	-3	2	5
K	$\frac{3}{2}$	*	$-\frac{5}{2}$

T_3	y	1
x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

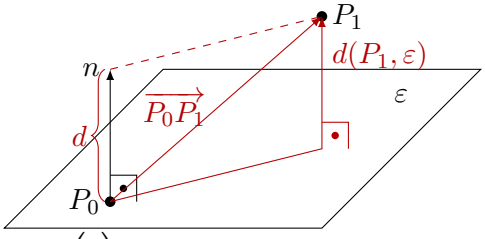
$y \ldots$ NBV, $y=t$ (beliebig), $x=-\frac{5}{2}t+\frac{7}{2}$, $z=\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t+\frac{7}{2} \\ t \\ \frac{3}{2}t-\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

(3) Abstand $d(P_1, \varepsilon)$ eines Punktens P_1 in einer Ebene ε.

ε: $ax+by+cz+d=0$, Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\boxed{d(P_1,\varepsilon) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P_0 \in \varepsilon$, d.h. $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

$$d(P_1,\varepsilon) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \underline{n}\right)\right|}{|\underline{n}|}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} x_1-y_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(P_1,\varepsilon) = \frac{|a(x_1-x_0+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Bsp. 18:

Abstand von $P_1(2,-9,-16)$ von der Ebene $\varepsilon: \; 3x-7y+8z+26=0$.

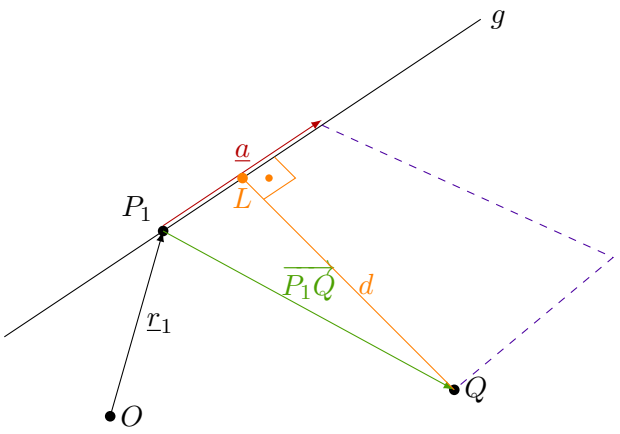
$$d(P_1,\varepsilon) = \frac{|3\cdot 2-7\cdot(-9)+8\cdot(-16)+26|}{\sqrt{3^2+(-7)^2+8}} = \frac{|-33|}{\sqrt{122}} = \underline{\underline{\frac{33}{\sqrt{122}}}}$$

Bemerkung: Gerade g in der x-y-Ebene, Gleichung $ax+by+c=0$, NV: $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, Abstand eines Punktes $P_1(x_1, y_1)$ von g:

$$\boxed{d(P_1, g)} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(4) Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g (in $\mathbb{R}^3$).

$g : \underline{r} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{\underline{r}_1} + t\underline{a} \quad t \in \mathbb{R}$ (Parameterdarstellung)



(d ist Höhe $\overline{LQ}$ des von $\underline{a}$ und $\overrightarrow{P_1Q}$ aufgespannten Parallelogramms)

Lotfußpunkt: $\boxed{\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}}}$

Bsp. 19:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, Q(1,1,1)$$

a) Abstand $d(Q, g)$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_1Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(Q, g) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}$$

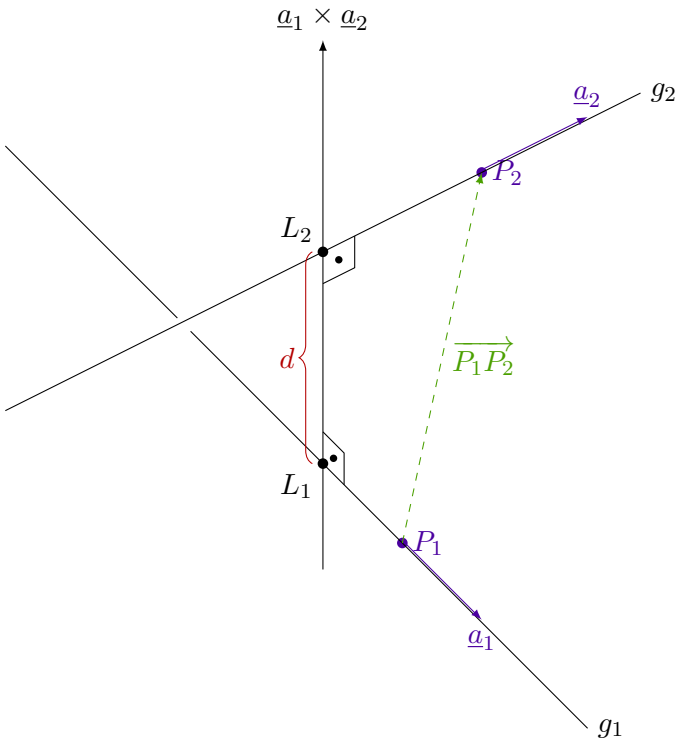
b) Lotfußpunkt: $\overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}} = \frac{\left(\overrightarrow{P_1Q}, \underline{a}\right)}{|\underline{a}|^2} \cdot \underline{a} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

(5) Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier nicht paralleler Geraden g_1 und g_2.

$g_1 : \underline{r} = \underline{r}_1 + s \cdot \underline{a}_1$

$g_2 : \underline{r} = \underline{r}_2 + t \cdot \underline{a}_2 \quad (s, t \in \mathbb{R})$



$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_2}_{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}\right| = d(g_1, g_2) = \frac{|(\underline{r}_2 - \underline{r}_1, \underline{a}_1 \times \underline{a}_2)|}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$

Bemerkung: Lotfußpunkte L_1 und L_2 aus Bedingungen $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_2$ ermittelbar.

1.5.6 EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Es sei $\underline{A}$ eine (n, n)-Matrix.

Def. 13:
Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt EIGENWERT (EW) der quadratischen Matrix $\underline{A}$, falls die Gleichung $\boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}}$ nichttriviale Lösungsvektoren $\underline{x}$ besitzt. Diese heißen dann EIGENVEKTOREN (EV) von $\underline{A}$ zum Eigenwert λ.

Diskussion:

(1) $\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$
D.h. nichttriviale Lösungen existieren genau dann, wenn $\boxed{det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0}$ (CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG) gilt.
Vorgehensweise zur Ermittlung von EW und EV:

- charakt. Gleichung lösen (n i.a. komlpexe Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$)
- Gleichungssystem $(\underline{A} - \lambda_i \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ für $i = 1, ..., n$ lösen.

Im folgenden werden nur symmetrische (n, n)-Matrizen $\underline{S}$ betrachtet, d.h. $\underline{S}^T = \underline{S}$.

Satz 6:
Es sei $\underline{S}$ eine symmetrische (n, n)-Matrix. Dann gilt:

(1) Alle Eigenwerte von $\underline{S}$ sind reell.

(2) Zu verschidenen EW λ_1 bzw. λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) gehörende EV $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ sind orthogonal (vgl. Disskussion).

(3) Es gibt eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$, die aus n paarweise orthonormierten EV $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ von $\underline{S}$ besteht.

(4) Es sei $\underline{V} = (\underline{v}_1|...|\underline{v}_n)$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren n paarweise orthonomierte EV von $\underline{S}$ sind. Dann gilt:

- $\underline{V} \cdot \underline{V}^T = \underline{V}^T \cdot \underline{V} = \underline{E}$ (d.h. $\underline{V}^{-1} = \underline{V}^T$, $\underline{V}$ ist sogenannte orthogonale Matrix)
- $\underline{V}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \curvearrowright \boxed{\underline{S} = \underline{V} \cdot \Lambda \cdot \underline{V}^T}$
- Es gilt $\underline{S}^{-1} = \underline{V} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \underline{V}^T$ mit $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}$

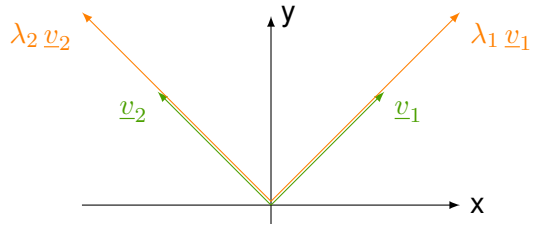
  $\underline{S}^n = \underline{V} \cdot \Lambda^n \cdot \underline{V}^T$

BETRAG (NORM) eines Vektors $|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ paarweise orthonormiert bedeutet:

$$(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

(2) Veranschaulichung im Fall $n = 2$:
Die symmetrische Matrix $\underline{A}$ habe die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und orthonomierte EV $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_2$, $V = (\underline{v}_1|\underline{v}_2)$. Es gilt $\underline{A} \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$, $\underline{A} \cdot \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$.

D.h $\underline{A}$ bewirkt eine Skalierung mit den Faktoren λ_1 bzw. λ_2 in Richtung $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$.



Def. 14: Es sei $\underline{S}$ eine reelle symmetrische Matrix vom Typ (n, n). Die Funktion $y = Q(\underline{x}) := \underline{x}^T \underline{S} \underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}$) heißt QUADRATISCHE FORM.

Diskussion:

(1) Im Falle $n = 2$ stellt $Q(\underline{x}) = const)$ (bzw. $Q(\underline{x}) + \underline{a}^T \underline{x} = const$) eine Kurve 2. Ordnung dar. Deren Gestalt kann durch die sogennante Hauptachsentransformation ermittelt werden.

(2) Ausführliche Schreibweise $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\underline{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ (mit $s_{12} = s_{21}$).

$$\boxed{Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}x^2}$$

(3) Es seien λ_1 und λ_2 die EV von $\underline{S}$ und $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ orthonormierte EV. Für einen beliebigen Vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ seien x^* und y^* die Koordinaten bzgl. der Basis $\underline{v}_1, \underline{v}_2$:

$$\boxed{\underline{x} = x^* \underline{v}_1 + y^* \underline{v}_2 = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \underline{V}\, \underline{x}^*}$$

Dann gilt:

$\boxed{Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 x^{*2}}$ (Darstellung bzgl. der sog. Hauptachsen)

Dann: $Q(x,y) = \underline{x}^T\, \underline{S}\, \underline{x} = (\underline{V}\, \underline{x}^*)^T\ \underline{S}\ (\underline{V}\, \underline{x}^*) = \underline{x}^{*T} \underbrace{\underline{V}^T\, \underline{S}\, \underline{V}}_{\Lambda} \underline{x}^* = \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2}$

Bsp. 20:

$Q(x,,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 = 45$

Welche Kurve ist das?

- Matrix $\underline{S}$ (vgl. Gleichung aus 2.) aus obiger Diskussion):
  $\underline{S} = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$
- charakteristische Gleichung:
  $det(\underline{S} - \lambda \underline{E}) \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 50\lambda + 225 \overset{!}{=} 0$
  $\underline{\underline{\lambda_1 = 5}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = 45}}$ (Eigenwerte)
- EV zu $\lambda_1 = 5$ ($(\underline{S} - \lambda \underline{E})\underline{x} \overset{!}{=} \underline{x}$):

$$\begin{aligned} 8x - 16y &= 0 \\ -16x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright x = 2y \curvearrowright \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

- EV zu $\lambda_2 = 45$:
  $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}} \quad (u \in \mathbb{R}, u \neq 0)$
- orthonomierte EV:
  z.B. $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Rechtssystem!)

Mit Gleichung aus 3.) aus obiger Diskussion:

$Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 x^{*2} = 5x^{*2} + 45y^{*2} = 45$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^{*2}}{9} + \frac{y^{*2}}{1} = 1}$ (Ellipse mit Halbachsen $a = 3,\ b = 1$)

2 FOLGEN, REIHEN, GRENZWERTE

2.1 ZAHLENFOLGEN

2.1.1 GRENZWERTE VON ZAHLENFOLGEN

Def. 1:
Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Eine Funktion f mit $Db(f) = \{u \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ und $Wb(f) \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.
Schreibweise:
$a_n = f(n) \qquad (n \in Db(f))$
$(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...)$
oft $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Bsp. 1:

a.) $a_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$
$(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, ...)$

b.) $a_0 = -1,\ a_n = n \cdot a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (rekursive Def.)
$(a_n) = (-1, -1, -2, -6, -24, ...),\ a_n = -n!$

c.) $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = (0.3, 0.33, 0.333, ...)$

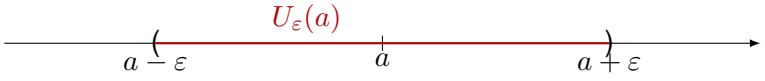
d.) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = \left(\frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, ...\right)$

Def. 2:

- (a_n) heißt KONVERGENT, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Die Zahl a heißt GRENZWERT von (a_n).
  Schreibweisen:
  $\boxed{a = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)}$ oder $\boxed{a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a}$
- (a_n) heißt DIVERGENT, falls (a_n) nicht konvergent ist.

Diskussion

(1) Für $\varepsilon > 0$ heißt $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (offenes Intervall) ε-UMGEBUNG VON a.



$\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) \equiv (\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(a))$
d.h. für jedes (noch so kleine) ε, liegen ab einem bestimmten (von ε abhängigen) Index $n_0(\varepsilon)$ alle Glieder $a_n (n \geq n_0(\varepsilon))$ in $U_\varepsilon(a)$.

(2) Im Bsp. 1 sind:
konvergente Folgen:
c.) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$
d.) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
divergente Folgen: a.) und b.)

(3) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt (a_n) NULLFOLGE.

Def. 3:
(a_n) heißt:

- STRENG MONOTON WACHSEND, falls für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$.
- MONOTON WACHSEND, falls für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.
- STRENG MONOTON FALLEND, falls für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$.
- MONOTON FALLEND, falls für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

Def. 4:
(a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n.

Diskussion:

(1) (a_n) beschränkt
$\Leftrightarrow \exists c > 0\ \forall n \quad |a_n| \leq C$
$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}\ \exists c_2 \in \mathbb{R}\ \forall n \quad c_1 \leq a_n \leq c_2$

(2) Folgen aus Bsp. 1:

	Folge	Monotonie	Beschränktheit
a.)	$a_n = (-1)^n \cdot n$	–	–
b.)	$a_n = -n!$	streng monoton fallend (ab $n = 1$)	–
c.)	$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n}$	streng monoton wachsend	$0,3 \leq a_n < \frac{1}{3}$
d.)	$a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$	–	$0 \leq a_n < \frac{5}{4}$

Satz 1:
Jede konvergente folge ist beschränkt.

Satz 2:
Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Def. 5:
(a_n) heißt BESTIMMT DIVERGENT gegen $\begin{cases}+\infty \\ -\infty\end{cases}$, falls gilt: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0(c)\ \forall n \geq n_0(c) \begin{cases}a_n > c \\ a_n < c\end{cases}$.

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}+\infty \\ -\infty\end{cases}}$

Bsp. 2:

a.) aus Bsp. 1c.): $a_n = \frac{3}{10} + ... + \frac{3}{10^n}$, (a_n) monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

b.) aus Bsp. 1b.): $a_n = -n!$, (a_n) monoton fallend und unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ ist bestimmt divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Diskussion:
Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergent ist, heißt UNBESTIMMT DIVERGENT.
Bpsw. Folge aus Bsp. 1a.) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Einige wichtige Grenzwerte:

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71...$ (EULERsche Zahl)

b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

c.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

d.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

Satz 4: Rechenregeln (Grenzwertsätze)
(a_n) und (b_n) seien zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} = b$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0, b \neq 0)$

Bsp. 3:

a.) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$

$$a_n = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{n}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Ausklammern der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner

b.) $a_n = n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$
(in Klammern: „$\infty - \infty$“ ↷ Erweitern mit 3. binomischer Formel)

$$a_n = \frac{n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)} = \frac{n \cdot (n^2 + 1 - n^2)}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n} = \frac{n \cdot 1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

oder: $\lim\limits_{n\to\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c.) $a_n = \dfrac{\sin n}{n} \qquad \left(0 \le |a_n| = \dfrac{|\sin n|}{n} \le \dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Allgemein: (a_n) beschränkt und (b_n) bestimmt divergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

2.1.2 LINEARE REKURSIONSGLEICHUNGEN (DIFFERENZENGLEICHUNGEN)

- Allgemeine Form einer Rekursionsgleichung k-ter Ordnung:
  $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}) \qquad (k \ge 1,\ n \ge n_0 + k)$
- Wir betrachten nur LINEARE REKURSIONSGLEICHUNGEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN (d.h. a_j nicht von n abhängig):
  $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k a_{n-k} + h_n} \quad k \ge 1,\ a_k \ne 0,\ n \ge n_0 + k$
  x_n gesucht, $a_1, a_2, ..., a_k, h_n$ $(n \ge n_0)$ bekannt.
- Indexverschiebung möglich:
  $\boxed{x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_k a_n + h_{n+k}} \quad (n \le n_0)$
  Wichtig ist die Differenz zwischen höchstem und niedrigstem Index von x (=Ordnung der Rekursionsgleichung).
- Da die größen $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ...$ auch durch x_n und die Differenzen $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}, \Delta^2 x_n := \Delta x_n - \Delta x_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}, ...$ ausgedrückt werden können, ist der Name DIFFERENZENGLEICHUNG sehr verbreitet.
- Die Differenzengleichung (aus erstem Punkt) heißt homogen, falls $h_n = 0$ (für alle n), sonst inhomogen.

Zur Lösung von der Differenzengleichung (aus erstem Punkt oberhalb):

(1) Allgemeine Lösung: $\boxed{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}}$, dabei ist $x_n^{(h)}$ die ALLGEMEINE LÖSUNG DER ZUGEHÖRIGEN HOMOGENEN GLEICHUNG $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k}}$ und $x_n^{(p)}$ eine PARTIKULÄRE (SPEZIELLE) LÖSUNG DER INHOMOGENEN GLEICHUNG.

(2) Es gibt k Lösungen $x_n^{(1)}, ..., x_n^{(h)}$ der homogenen Gleichung, so dass gilt:
$x_n^{(h)} = c_1 x_n^{(1)} + ... + c_k x_n^{(h)}$
Diese erhält man mit Hilfe der Lösungen der charakteristischen Gleichung:
$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k$
Dise ergibt sich aus dem Ansatz:
$x_n^{(h)} = \lambda^n$ $(\lambda \ne 0)$
$\Rightarrow \lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_k \lambda^{n-k} \quad | : \lambda^{n-k}$
$\Rightarrow$ Bei k verschieden Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_2$ ergibt sich $x_n^{(h)} = c_1 \lambda_1^n + ... + c_k \lambda_k^n$, falls z.B. λ 2-fach auftritt, dann: $x_n^{(h)} = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_1^n \cdot n + ...$

(3) Für die Partikulärlösung $x_n^{(p)}$ führen spezielle Ansätze zum Ziel:

Inhomogenität h_n	Bedingung	Ansatz für $x_n^{(p)}$
Polynom in n (Grad r)	$\lambda = 1$ ist keine*) Lösung von λ^k	Polynom vom gleichen Grade mit unbestimmten Koeffizienten
Potenzfunktion b^n	$\lambda = b$ ist keine*) Lösung von λ^k	$x_n^{(p)} = A \cdot b^n$

*) bei ξ-facher Lösung ist der Ansatz mit n^ξ zu multiplizieren
Unbestimmte Koeffizienten $A, ...$ durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung und Koeffizientenvergleich ermitteln.

(4) Die k Koeffizienten $c_1, ..., c_k$ in der allgemeinen Lösung können durch die Anfangsbedingungen (AB) (Vorgabe der ersten k Glieder von (x_n)) ermittelt werden.
Es sind also folgende Schritte durchzuführen:

A) Allgemeine Lösung $x_n^{(h)}$ der homogenen Gleichung ermitteln

B) eine spezielle Lösung $x_n^{(p)}$ der inhomogenen Gleichung ermitteln

C) $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$

D) AB erfüllen

Bsp. 4: $x_{n+1} = 2x_n + 3 \qquad n \geq 0,\ x_0 = 1$
Erste Glieder: $1,\ 5,\ 13,\ 29, ...$
Typ: Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung
Lösung:

A) homogene Gleichung $x_{n+1} = 2x_n$ (charakteristische Gleichung $\lambda_1 = 2$)
$\lambda_1 = 2 \ \Rightarrow \ x_n^{(h)} = C \cdot 2^n$

B) $h_n = 3$ (Polynom des 0-ten Grades). Ansatz: $x_n^{(p)} = A$ (Einsetzen in Ausgangsgleichung)
$A = 2 \cdot 2A + 3 \ \Rightarrow \ A = -3 \ \Rightarrow \ x_n^{(p)} = -3$

C) $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot 2^n - 3$

D) AB: $n = 0 \ \Rightarrow \ x_0 = 1 = C \cdot 2^0 \ \Rightarrow \ C = 4$

Also: $x_n = 4 \cdot 2^n - 3$

Bsp. 5: $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \qquad n \geq 0,\ x_0 = 2,\ x_1 = 3$
Erste Glieder: $2,\ 3,\ 7,\ 13,\ 27,\ 53, ...$
Typ: lineare homogene Dz.-Gleichung 2. Ordnung

A) Schritt A liefert bereits die allgemeine Lösung (B und C entfallen): $\lambda^2 = \lambda + 2 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$
$\Rightarrow \ x_n = x_n^{(h)} = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$

D) AB erfüllen:
$$C = \frac{5}{3},\ C_1 = \frac{1}{3} \begin{cases} n = 0 & \Rightarrow \ x_0 = 2 = C_1 + C_2 \\ n = 1 & \Rightarrow \ x_1 = 3 = -C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

Also: $x_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{5}{3} \cdot 2^n$

Diskussion: Bei einer homogenen linearen Dz.-Gleichung 2. Ordnung können folgende Fälle auftreten:

- $\lambda_1,\ \lambda_2$ reel und verschieden:
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (vgl. Bsp. 5)
- $\lambda_1 = \lambda_2$ (reelle Doppellösung):
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_2^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2 \cdot n)$
- $\lambda_{1,2} = i \pm iv \ (v \neq 0)$ homogene komplexe Lösung:
$\Rightarrow x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (wie im 1. Fall, die Koeffizienten C_1 und C_2 sind aber im allgemeinen komplex, x_n selbst ist aber wieder reell)

Reeller Ansatz ist mit Hilfe der Formeln von EULER und MOIVRE möglich:
$\lambda_1^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$
$\lambda_2^n = \left(r \cdot e^{-i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{-i \cdot n \cdot \varphi} = r^n(\cos(n\varphi) - i \cdot \sin(n\varphi))$
Damit reeller Ansatz:
$x_n = x_n^{(h)} = K_1 r^n \cos(n\varphi) + K_2 r^n \sin(n\varphi)$
Bemerkung: Falls Rechner mit komplexer Arithmetik vorhanden, so ist direkt die Formel aus 1. Fall bequemer.

2.1.3 UNENDLICHE REIHEN

2.1.3.1 GRUNDBEGRIFFE

Def. 6: Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_n)_n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$. Die Zahlenfolge $(S_n)_n \geq n_0$ mit $S_{n_0} := a_{n_0},\ S_{n_0+1} := a_{n_0} + a_{n_0+1},\ S_{n_0+2} := a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2},\ ...,\ S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n$ (PARTIALSUMEENFOLGE) heißt UNENDLICHE REIHE.

Bezeichnung: $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n}$

- Die Zahlen a_n heißen Glieder der Reihe, die Zahlen S_n heißen Partialsummen der Reihe
- Ist die Reihe konvergent, d.h. die Folge (S_n) ist konvergent, so heißt $s := \lim\limits_{n\to\infty} S_n =: \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ die Summe der Reihe
- Die Reihe heißt (bestimmt oder unbestimmt) divergent, wenn die Partialsummen die entsprechende Eigenschaft haben.

Bemerkung: Oft $n_0 = 0$ oder $= 1$

Bsp. 6: $a_n = aq^n$ mit $a \neq 0, q \neq 0, n = 0, 1, 2, ...$
$(a_n) = (a, aq, aq^2, aq^3, ...)$ (GEOMETRISCHE ZAHLENFOLGE)
$(S_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ (GEOMETRISCHE REIHE)
$= (\underbrace{a}_{s_0}, \underbrace{a + aq}_{s_1}, \underbrace{a + aq + aq^2}_{s_2}, ...)$
$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n \quad | \cdot q$
$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n+1}$
Beide Zeilen voneinander abgezogen:
$S_n - S_n q = a - aq^{n+1}$
$S_n(1 - q) = a - aq^{n+1} \quad | : (1 - q)$ falls $q \neq 1$
$\boxed{S_n = a \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (SUMMENFORMEL FÜR DIE ENDLICHE GEOMETRISCHE REIHE mit Anfangsglied a und $n + 1$ Summanden)
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{a - q}$ falls $|q| < 1 \Rightarrow$ Summe der unendlichen geometrischen Reihe:
$\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1 - q}}$ für $|q| < 1$.
z.B. $0, \overline{72} = 0, 727272... = \dfrac{72}{100} + \dfrac{72}{10.000} + \dfrac{72}{1.000.000} + ... = \dfrac{72}{99} = \dfrac{8}{11}$

Bsp. 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ heißt HARMONISCHE REIHE. Offensichtlich ist (S_n) streng monoton wachsend. Man kann zeigen, dass (S_n) nicht beschränkt ist. Aus Satz 3 folgt: die harmonische Reihe ist bestimmt divergent.

Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Def. 7: Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt

(a) absolut konvergent, falls $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

(b) bedingt konvergent, falls $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|$ nicht konvergent ist.

Satz 5: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Diskussion:

(1) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

(2) Für Reihen mit nicht-negativen Gliedern ($a_n \geq 0$ für alle n) ist absolute Konvergenz identisch mit (gewöhnlicher) Konvergenz. Für solche Reihen gilt entweder $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ [(absolut) konvergent] oder $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ [bestimmt divergent].

2.1.3.2 KONVERGENZKRITERIEN

1. Notwendiges Konvergenzkriterium

Satz 6: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

bzw.: (a_n) konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

Beweis: $a_n = S_n - S_{n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s - s = 0$

Bemerkung:

a) Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend. Z.B. $a_n = \dfrac{1}{n}$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

b) Anwendung des Satzes meist in logisch äquivalenter Form: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ divergiert

Bsp. 8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{10n-1}\right)^{50}$

$a_1 = 1,94 \cdot 10^{-48}, a_2 = 1,3 \cdot 10^{-49}, ...$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{10-\frac{1}{n}}\right)^{50} \neq 0$

$\Rightarrow$ Reihe divergent (sogar besimmt divergent, da alle $a_n \geq 0$)

2. Hinreichendes Kriterien

(A) LEIBNITZKRITERIUM FÜR ALTERNIERENDE REIHEN

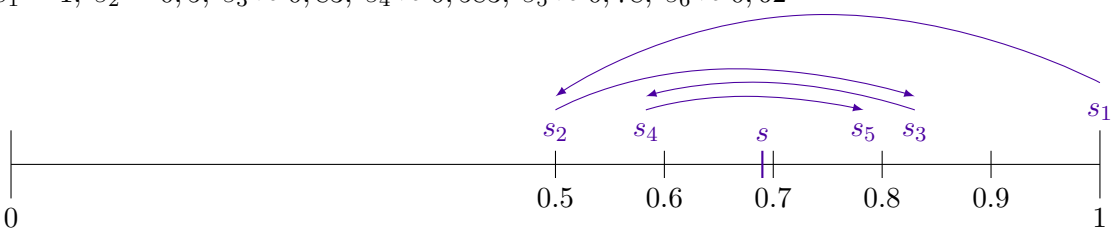
Satz 7: Sei (b_n) Folge mit

- $b_n \geq b_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ...$ konvergent. D.h. wenn die Beträge b_n der Glieder einer alternierenden Reihe mit $a_n = (-1)^n b_n$ eine Nullfolge bilden, dann ist die Reihe konvergent.
Weiter gilt: $|s - S_n| \leq |a_{n+1}|$
Also ist der Fehler bei der Approximation von s durch S_n beschränkt durch den Beträg von a_{n+1}.

Bsp. 9: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ...$ (alternierende harmonische Reihe)

$s_1 = 1,\ s_2 = 0,5,\ s_3 \approx 0,83,\ s_4 \approx 0,583,\ s_5 \approx 0,78,\ s_6 \approx 0,62$



Man kann zeigen: $s = \ln 2 = 0,6931$

(B) VERLEICHSKRITERIEN FÜR REIHEN MIT NICHT-NEGATIVEN GLIEDERN

Satz 8: (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_n)_{n\geq n_0}, (b_n)_{n\geq n_0}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_1 \geq n_0$ und $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$ (d.h.

konvergent).

Dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ (d.h. konvergent).

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ heißt dann konvergente Majorante zur Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Beweisidee: $0 \leq a_n \leq b_n \rightsquigarrow 0 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \leq \infty$

Satz 9: (Minoranten-Kriterium)

Seien $(a_n)_{n\geq n_0}, (b_n)_{n\geq n_0}$ Folgen mit $0 \leq b_n \leq a_n$ für $n \geq n_1 \geq n_0$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (d.h. divergent)

Dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (also auch divergent)

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ heißt divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Eine nützliche Vergleichsreihe für die Anwendung der Sätze 8 und 9 ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \lambda > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Bsp. 10: Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 - n + 1}}_{a_n}$ (Vermutung: Verhalten wie $\sum \frac{1}{n^2}$ wegen der Dominanz der höchsten Potenz)

Wir versuchen eine konvergente Majorante zu finden.

$a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} \geq \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}}$ (wegen $n \geq \frac{n^2}{2}$ für $n \geq 2$)

Somit $\frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2} =: b_n$

Mit der Vergleichsreihe gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

$\overset{\text{Satz 8}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent, sogar absolut konvergent, da $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4}{n^3 + n^2 + 31}$ (Vermutung: divergent, da Verhalten wie $\sum \frac{n^2}{n^3} = \sum \frac{1}{n}$)

Wir versuchen divergente Minoranten zu finden.

$a_n = \frac{n^2 + 4}{n^3 + n^2 + 31} \geq \ldots \geq \frac{1}{3n} =: b_n$ (für $n \geq 4$)

Wieder gilt mit der Vergleichsreihe: $\sum b_n$ divergent. Also folgt mit Satz 9: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(C) QUOTIENTEN- UND WURZELKRITIERIEN

Satz 10: (Quotientenkriterium)
Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\begin{cases}<1\\>1\end{cases}\Rightarrow\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n \text{ ist }\begin{cases}\text{absolut konvergent}\\\text{divergent}\end{cases}$$

Satz 11: (Wurzelkriterium)
Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\begin{cases}<1\\>1\end{cases}\Rightarrow\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n \text{ ist }\begin{cases}\text{absolut konvergent}\\\text{divergent}\end{cases}$$

Bemerkung: Falls in Satz 10 oder 11 $\lim\ldots=1$ gilt, so ist mit diesem Kriterium keine Konvergenzaussage möglich.

Bsp. 11:

a.) $\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n\cdot(-1)^n}_{a_n}$

Wegen $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\ln n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ liefert das Wurzelkriterium, dass die Reihe absolut konvergent ist.

b.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}$

Wegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=\frac{4n^2+4n+2n+2}{n^2+2n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}4$

Daher ist die Reihe divergent.

2.1.3.3 RECHENREGELN

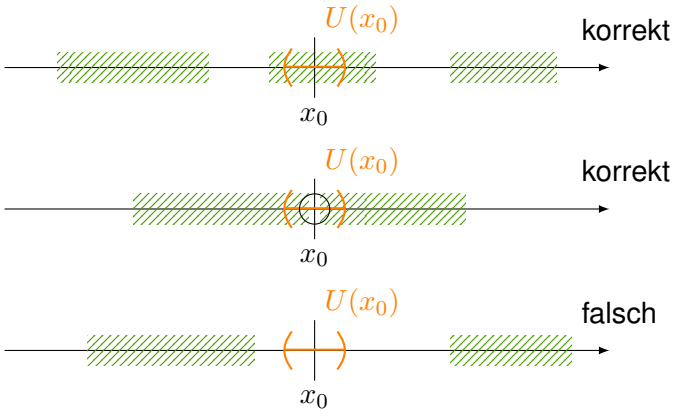
- $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n$ konvergent mit Summe a und b, dann gilt:
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n+b_n)=a+b$
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot a$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ die Glieder a_n lassen sich beliebig umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.
- $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n$ absolut konvergent mit Summen a und b, dann gilt:

– $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = a \cdot b \qquad \left(= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i} \quad \text{Cauchy-Produkt}\right)$

2.2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

2.2.1 GRENZWERTE VON FUNKTIONEN

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0)\{x_0\} \subseteq Db(f)$.

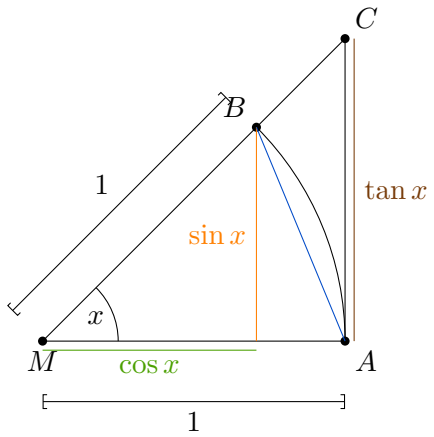


$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x$ (für alle n) und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen a, wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss NICHT selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$F_{\triangle MAB} \leq F_{Sektor\ MAB} \leq F_{\triangle MAC}$
$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x}$
$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

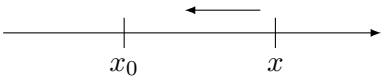
Bsp. 2:

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 - 7x + 4}{3\cos x} = \dfrac{4}{3}$

b.) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{"0"}{0}$ Satz nicht anwendbar.
$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x + 2 = 5$
(andere Möglichkeit mit $\dfrac{"0"}{0}$ umzugehen lernen wir später)

Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.



Andere Schreibweise: $\lim\limits_{x\searrow x_0} = \lim\limits_{x\to x_0+0}$

b.) linkseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog rechtsseitiger Grenzwert

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

d.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog s.o.

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

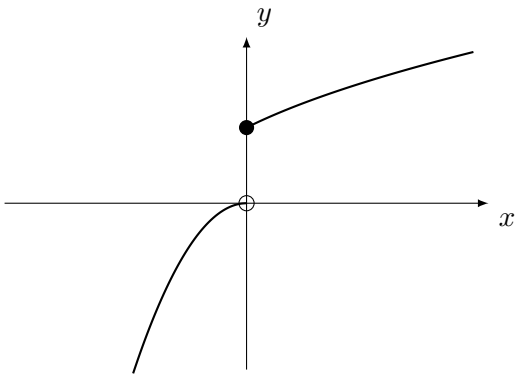
Wir schreiben $\lim\limits_{\bullet} f(x) 0 \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

- $\begin{cases} x \to x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Satz 2:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} = a$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



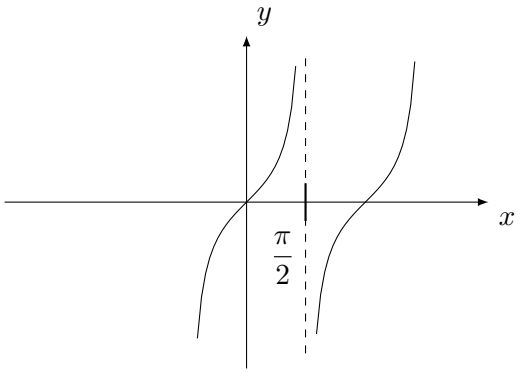
$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht!

Bsp. 4:

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) =$ "$\infty \cdot 0$"
$\overset{u=\frac{4}{x}}{=} \lim\limits_{u\searrow 0} \frac{4}{u}\sin(u) = 4$

Bsp. 5:

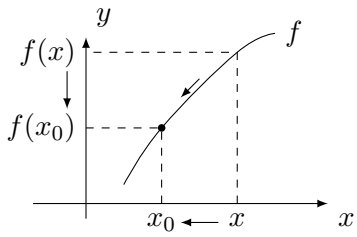
$\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$
$\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$



2.2.2 STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben.
Es heißt f:

a.) stetig in x_0 falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



b.) linksseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

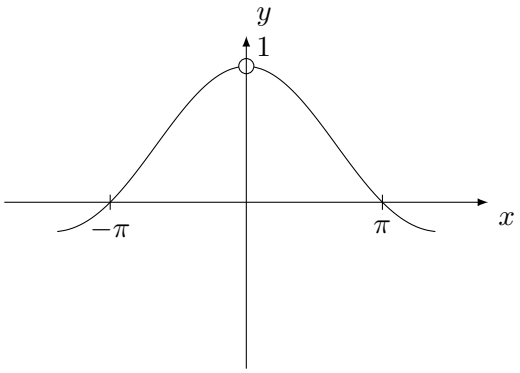
c.) rechtsseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

a.) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

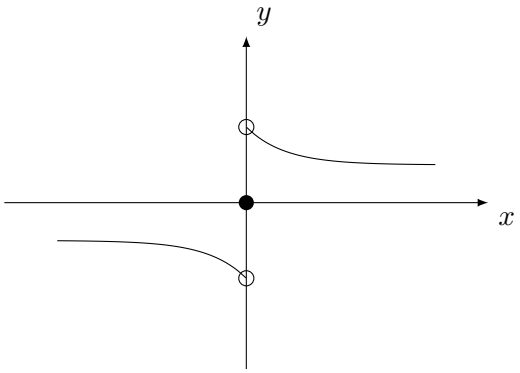
Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

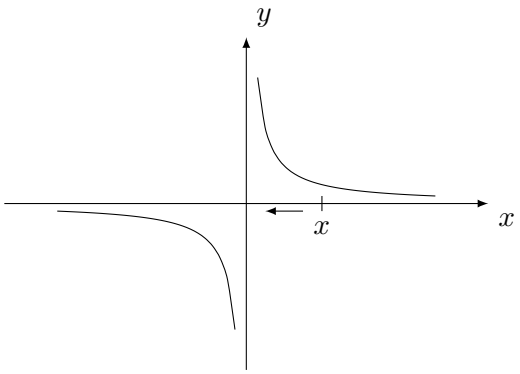


b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x)$

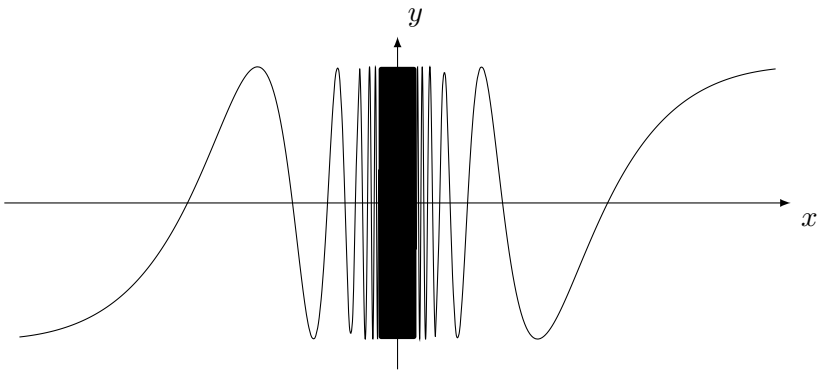
Bezeichnung: endlicher Sprung.



c.) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.



d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nicht existiert.



Def. 4: Die Funktion $f : DB(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) IN EINEM INTERVALL $I \subset Db(f)$ STETIG, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) STETIG, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in 1.4.1 und 1.4.3 betrachteten Funktionen ist stetig.

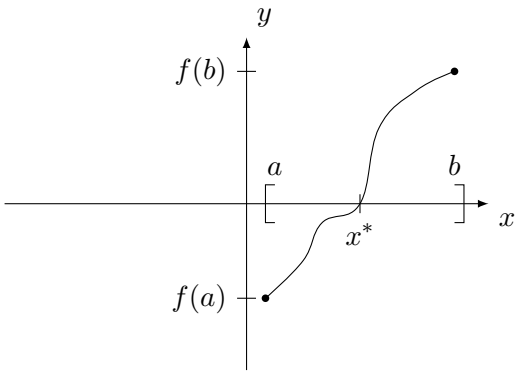
Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0, so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g,\ f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$(falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)
Seien $g : Db(g) \to \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:
Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0.

Satz 5: (Zwischenwertsatz)
Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben

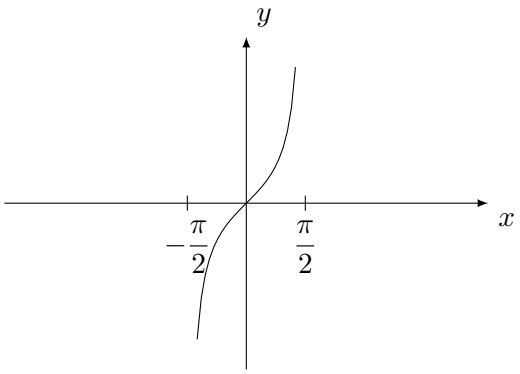
unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = 0$



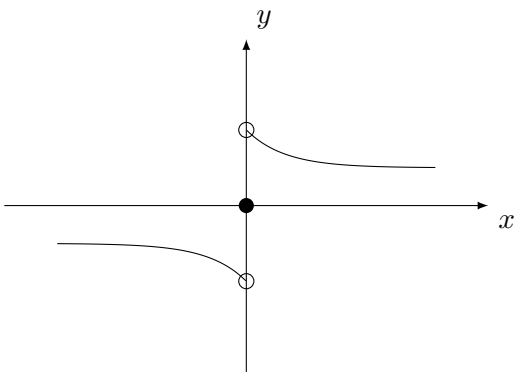
Satz 6: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.



b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1,1]$ an.



2.3 POTENZREIHEN

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0.

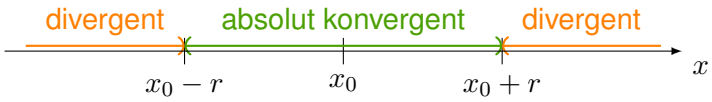
Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R} | \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutz man Satz 10 und 11 aus 2.1.3.1 und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.
Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$.



Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
  - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
  - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x - x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius.
  Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus $\to$ gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\Rightarrow$ Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$

Randpunkte:

$x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)

$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r = \infty$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: BESTÄNDIGE KONVERGENZ

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + ...$ d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n\text{ungerade} \end{cases}$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{(2n)!}$ ($\sum b_n(u-u_0)^n$)

$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)\cdot(2n+1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x = \text{"}\sqrt{\infty}\text{"} = \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1,1)$ (geometrische Reihe)

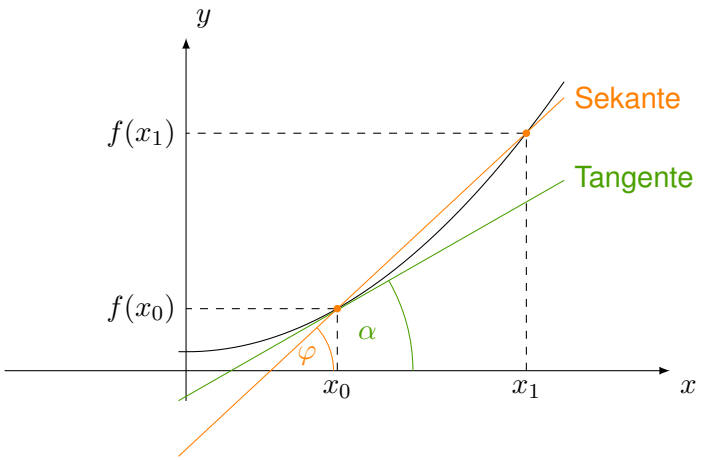
b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ (Beweis später)

Satz 2: Die GRENZFUNKTION jeder Potenzreihe ist IM KONVERGENZBEREICH STETIG.

3 DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN

3.1 GRUNDBEGRIFFE

TANGENTENPROBLEM



Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \to x_0$
- Damit geht Sekante über in die Tangente.
  Außerdem geht φ in α über.

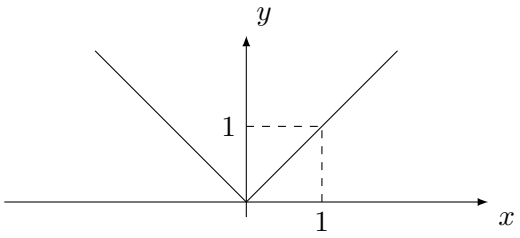
$$\tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \tan\varphi = \lim_{x_1\to x_0} \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls der Grenzwert $\boxed{f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ existiert.
$f'(x_0)$ heißt dann 1. ABLEITUNG von f an der Stelle x_0.

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $(t : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ Anstieg der Tangente ist als $m = \tan\alpha = f'(x_0)$

- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
  z.B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:



Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis:
Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.
$\Rightarrow \exists\ K > 0$ mit $\left|\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| = \dfrac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$
$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f$ ist stetig.

Def. 2: Eine Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$
$Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) differenzierbar im Interval $I \subseteq Db(f)$, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.
d.h. $\lim\limits_{x \nearrow x_r}$ bzw. $\lim\limits_{x \searrow x_r} \dfrac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ existiert

b.) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in Db(f)$ differenzierbar ist.

SCHREIBWEISE:
Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit
$f' : Db(f') \to \mathbb{R}, f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
wobei $Db(f')$ aus allen Punkten $x \in Db(f)$ besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv die n-te Ableitung von f an der Stelle x_0 mittels
$f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, ...$
wobei $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) : x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^n - x^n\right) \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

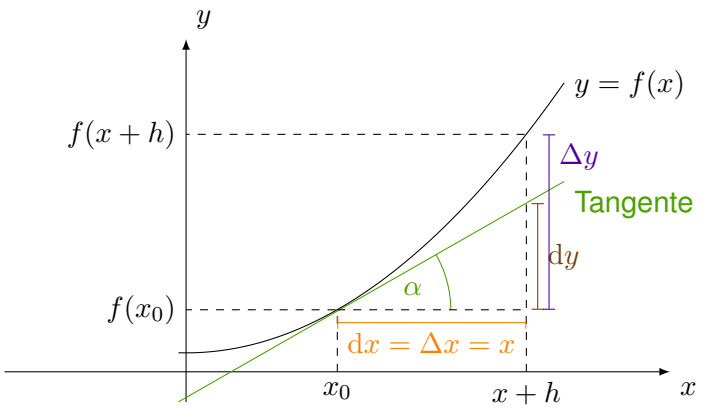
d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bsp. 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} && \mid \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot \\
&= \frac{2\cdot\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} && \mid \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Also $f'(x) = \cos x$.
BEMERKUNG: Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen. Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

3.1.1 DAS DIFFERENTIAL



$\mathrm{d}y$: Veränderung der Funktion

Δy: Veränderung der Tangente

$\mathrm{d}y = h \cdot \tan\alpha = f \cdot f'(x_0)$

Def. 4:

a.) $\mathrm{d}y := f'(x_0)\cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende DIFFERENTIAL von f.

b.) $\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende DIFFERENZ von f.

Diskussion

(1) Δy ist die Änderung der Funktion f, wenn x in $x + h$ übergeht; $\mathrm{d}y$ ist die entsprechende Änderung wenn statt f die Tangente an der Stelle x_0 betrachtet wird (Linearisierung).

(2) Für kleine Zuwächse Δx gilt: $\Delta y \approx \mathrm{d}y$
d.h. $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ für kleines Δx (nutzt man in der Fehlerrechnung)

(3) Sei $y = f(x) = x \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}x = 1 \cdot h$ also $\boxed{h = \Delta x = \mathrm{d}x}$

(4) Damit $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient
andere Schreibweise: $f'(x) = \dfrac{d}{\mathrm{d}x} f(x)$

(5) Höhere Ableitungen:
$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$

3.2 DIFFERENTIATIONSREGELN

Satz 1: Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$ (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Produktregel)
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

Bsp. 1:

a.) $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

b.) $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$ (Produktregel)

c.) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$ (Quotientenregel)

Satz 2: Seien $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ g : Db(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R},\ Db(g) \subseteq \mathbb{R}$ und

- g bei $x_0 \in Db(g)$ differenzierbar
- f bei $g(x_0) \in Db(f)$ differenzierbar

so gilt:
$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise:
$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{\mathrm{d}x}$ (äußere Ableitung · innere Ableitung)

Bsp. 2:

a.) $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_{u}$

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{\mathrm{d}x} = \cos u \cdot 3 = 3 \cos 3x$

b.) $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$

Substitution:

$u := \tan 3x$

$v := 3x$

$\Rightarrow y = 2^u,\ u = \tan v$

$\Rightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{\mathrm{d}x} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$

Bsp. 3: (Logarithmische Differentiation)

$f(x) = x^{\sin x} \qquad x \in (0, \infty)$

Basis und Exponent hängen von x ab!

Die Regeln $(x^a)' = ax^{a-1}$ bzw. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ sind nicht unmittelbar anwendbar.

Betrachten:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\sin} \\ \ln(f(x)) &= \sin x \cdot \ln x \\ \overset{\text{Ableiten}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f'(x) &= f(x) \cdot (cos(x) \cdot \ln x + \sin x \frac{1}{x}) \\ &= x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Satz 3: Sei $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Kurvenradius r.

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}$

Bsp. 4: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad |x| < 1$

3.3 ANWENDUNGEN

3.3.1 TAYLORSCHE FORMEL, TAYLOR-REIHE

PROBLEM: „Komplizierte“ Funktionen f soll in der Umgebung von x_0 durch ein Polynom p_n n-ten Grades angenähert werden.

ANSATZ: $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$

FORDERUNG: $p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0),\ p_n''(x_0) = f''(x_0), ...$

liefert: $p_n(x_0) = a_0,\ p_n'(x_0) = a_1,\ p_n''(x_0) = 2a_2, ...$

und $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

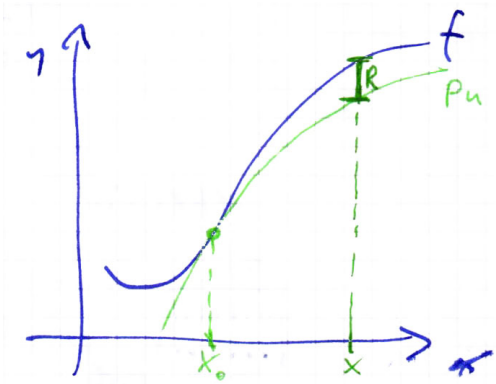
Allgemein: $\boxed{p_n^{(k)} = k! a_k}$ für $k = 0, 1, ..., n$

Def. 1: Das Polynom $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ heißt TAYLORPOLYNOM n-ten Grades mit Entwicklungsstelle x_0.

Diskussion:

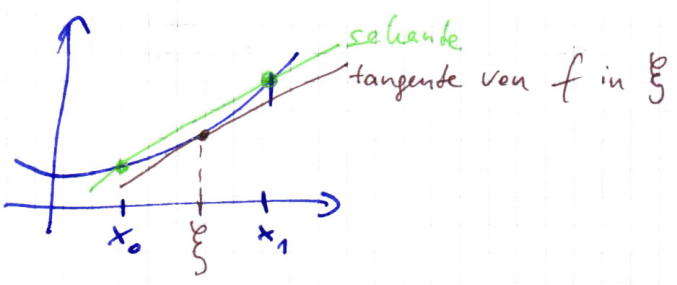
(1) p_n ist eine Näherung für f.
Fehler: $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$ heißt Restglied

(2) Restglied ist im Allgemeinen umso kleiner, je kleiner $|x - x_0|$ ist und je größer n ist.



Satz 1: Taylorsche Formel
Es sei f in $[a,b]$ $(n+1)$-mal differenzierbar, sowie $x_0, x \in [a,b]$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x (d.h. $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ mit $\vartheta \in (0,1)$) mit $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$: RESTGLIEDFORM VON LAGRANGE.
Es gilt also $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$

Diskussion: Spezialfall $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ (MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG)



Satz sagt: es gibt zwischen x_0 und x_1 einen Punkt auf der Funktion, sodass die Senkante die Tangente dieses Punktes ist.

Umstellen liefert: $\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Anstieg der Tangente}} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$

Bsp. 1: $f(x) = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = \ldots$$
$$\overset{x_0=0}{\Longrightarrow} f'(0) = 1 = f''(x) = f'''(x) = \ldots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

Für $x = \frac{1}{10} = 0,1$ und $n = 4$ gilt:

$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \underbrace{\frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{R_4(0,1)}$ für ein $\vartheta \in (0,1)$.

$\Rightarrow e^{0,1} = \underbrace{1 + 0,1 + 0,005 + 0,0001\overline{6} + 0,00000416}_{=1,10517083} + R_4(0,1)$ Abschätzen des ϑ:

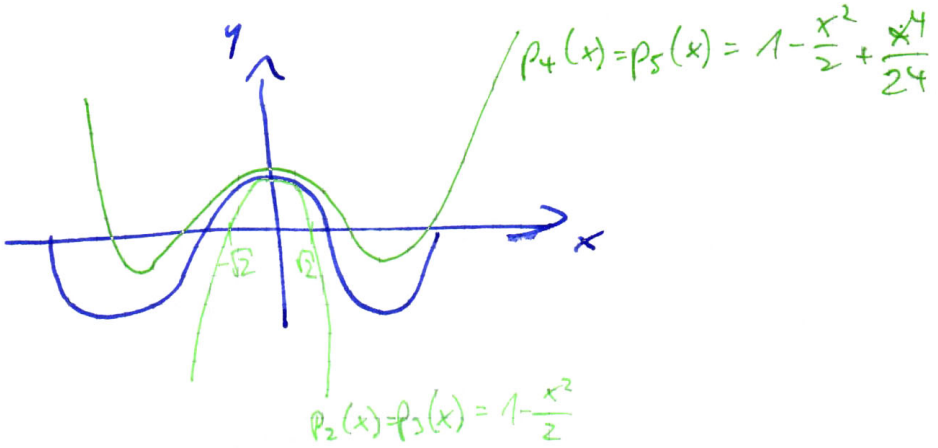
$$8,\overline{3} \cdot 10^{-8} = \frac{0,1^5}{5!} = \frac{0,1^5}{5!} e^0 < \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} e^{1 \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 25 \cdot 10^{-8}$$
$$\Rightarrow 1,10517083 + 8,\overline{3} \leq e^{0,1} \leq 1,10517083 + 25 \cdot 10^{-8}$$
$$1,105170916 \leq e^{0,1} \leq 1,10517083$$

Bsp. 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x),\ x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1 \\ f'(x) &= -\sin x \Rightarrow f'(x_0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(x_0) = -1 \\ f'''(x) &= \sin x \Rightarrow f'''(x_0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

$n = 2m + 1$

$$\cos x = \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} \underbrace{-\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0}{2!}(x-x_0)^2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$



Näherung: $\cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2}$ für $|x| \ll 1$

Fehler: $|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$

Bsp.:

$$\cos 5^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right) = \underbrace{1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2}}_{0{,}9961923} + R_3$$

...

$|R_2| \leq \frac{\pi^4}{36^4 \cdot 24} = 2{,}416 \cdot 10^{-6}$

genau gilt: $\cos 5^\circ = 0{,}99619$ (auf 5 Stellen genau)

Bsp. 3: $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\ldots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ &= \binom{\alpha}{k} \cdot k!(1+x)^{\alpha-k} \end{aligned}$$

wir betrachten $x_0 = 0$

$f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, ..., $f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n,k \in \mathbb{N},\ k \leq n \\ \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} & \text{kann für beliebige } n \in \mathbb{R} \text{ ausgewertet werden.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \text{ mit } \vartheta \in (0,1)$$

Bsp. 4: $f(x)\ldots$ Polynom n-ten Grades

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow R_n(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Taylorpolynom stellt f exakt dar (Entwicklung nach Potenzen von $(x - x_0)$)

3.3.1.1 TAYLOR REIHEN

Satz 2: Es sei f auf $U(x_0)$ beliebig oft differenzierbar und es gelte $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Dann gilt $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$.

Denn: Taylor-Formel sagt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$. Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Bsp. 5: $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ (vgl. Bsp. 1)

Es gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Wähle n_0 so, dass $q := \dfrac{|x|}{n_0} < 1$.
$\Rightarrow$ für $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq e^{|\vartheta x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n_0} \underbrace{\cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n_0}}_{(n-n_0+1) \text{ Faktoren}} \\ &= e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot q^{n-n_0+1} \to 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 6: $\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}(x)$ (vgl. Bsp. 2)

Ähnlich wie in Bsp. 5 kann man zeigen $\lim_{n\to\infty} R_{2m+1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Analog: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 7: Restglieduntersuchung in Bsp. 3 führt zu:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

z.B. für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \text{falls } |x| \ll 1\end{aligned}$$

3.3.2 GRENZWERTBESTIMMUNG MITTELS DER REGEL VON L'HOPITAL

Satz 3: (Regel von l'Hopital)
Es gelte:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

(2) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (als eigentlicher und uneigentlicher Grenzwert).

Dann folgt: $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$ $\left(\text{Typ: } "\frac{0}{0}"\right)$

Die gleiche Aussage gilt, wenn 1.) ersetzt wird durch

1'.) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ $\left(\text{Typ: } "\frac{\infty}{\infty}"\right)$

BEWEIS: seien f, g, f', g' stetig in x_0 und $g'(x_0) \neq 0$

Mittelwertsatz: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{0} + f'(\xi)(x - x_0)}{\underbrace{g(x_0)}_{0} + g'(\xi)(x - x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Bsp. 8:

a.) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

b.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

c.) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$

Regel also auch mehrfach hintereinander anwendbar.

d.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh(x + 1)}{\cosh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cosh(x + 1)}{\sinh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh(x + 1)}{\cosh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\cdots$

$\Rightarrow$ Satz nicht anwendbar, da 2.) nie erfüllt ist.

Aber:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sinh(x + 1)}{\cosh x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{x+1} - e^{-(x+1)}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{x+1}\left(1 - e^{-2(x+1)}\right)}{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)} = e \underbrace{\lim \frac{1 - e^{-2(x+1)}}{1 + e^{-2x}}}_{=1} =$

e

Diskussion:

(1) Man beachte, dass der Anwendung von Satz 3 Zähler und Nenner einzeln differenziert werden (keine Quotientenregel)!

(2) Falls $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, DARF MAN NICHT schlussfolgern, dass $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert (siehe Bsp. 9).

Bsp. 9: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+\sin x}{3x-\cos x} = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\cos x}{3+\sin x}$ existiert nicht.

1.) erfüllt, 2.) nicht erfüllt $\Rightarrow$ Satz nicht anwendbar

Aber:

$$\frac{5x+\sin x}{3x-\cos x} = \frac{x\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(3-\frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{5+\frac{\sin x}{x}}{3-\frac{\cos x}{x}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{3}$$

Weitere unbestimmte Ausdrücke:

Durch Zurückführen auf $\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ oder $\text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$ lässt sich auch folgendes behandeln:

"$0\cdot\infty$": $f(x)\cdot g(x)$ als Doppelbruch schreiben, d.h. $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ist dann vom Typ $\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ oder $\text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$.

"$\infty-\infty$": Ausklammern $f(x)-g(x) = f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$ oder falls Brüche vorliegen Hauptnenner bilden.

"0^0"/"1^∞"/"∞^0": Umformung

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}\exp\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to a}\exp\left(g(x)\ln f(x)\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to a}\underbrace{g(x)\cdot\ln f(x)}_{\text{Typ "}0\cdot\infty\text{"}}\right)\end{aligned}$$

Bsp. 10:

a.) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cdot\cot 3x \overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\frac{1}{\cot 3x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\tan 3x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\tan^2 x}{3(1+\tan^2 3x)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$

b.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\sin x\cdot(e^x-1)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \ldots$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\cos x(e^x+1)+\sin(x)\cdot e^x}$

$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{-\sin x\cdot(e^x-1)+\cos(x)\cdot e^x+\cos(x)\cdot e^x+\sin(x)\cdot e^x} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

c.) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}1^\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left((1-x)^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\exp}_{\text{tauschen geht, da }\exp(\cdot)\text{ stetig ist}}\left(\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right)$

$= \exp\underbrace{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right)}_{\text{"}\ \text{"}\ Typ\ \frac{0}{0}}$

Denn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{1-x} = -1$

3.3.3 KURVENDISKUSSION

PROBLEMSTELLUNG: Gegeben ist eine Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$.
Dann ist der Graph der Funktion definiert durch: $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in Db(f)\}$.
Dieser Graph ist zu untersuchen auf

a.) Nullstellen

b.) Stellen lokaler bzw. globaler Extrema

c.) Wendestellen

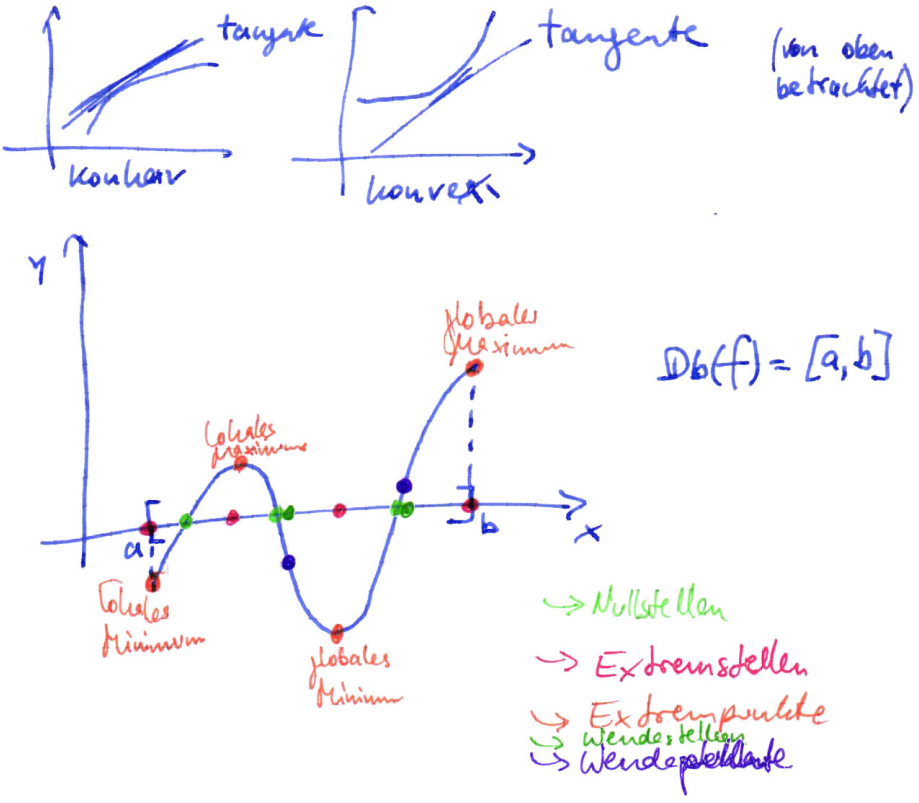
d.) Verhalten im Unendlichen, bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs $Db(f)$ und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen.

Diskussion:

(1) $x_0 \in Db(f)$ heißt NULLSTELLE n-TER ORDNUNG, falls
$f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^n(x_0) \neq 0$.
Zur Nullstellenbestimmung lernen wir bald das (iterative) Newton-Verfahren kennen.

(2) LOKALE EXTREMA sind extremal bzgl. einer Umgebung der Extremstelle.
GLOBALE EXTREMA sind extremal bzgl. des gesamten Definitionbereichs, sie sind lokale Extrem oder Funktionswerte in den Randpunkten.

(3) WENDEPUNKTE sind Punkte, an denen die Kurve von konkav in konvex oder von konvex in konkav übergeht.



(4) Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und der Ableitungen an der Stelle x_0 (f sei auf $U(x_0)$ hinreichend oft differenzierbar).

$f'(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 streng monoton fallend.
$f'(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.
$f'(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	f in x_0 lokal extremal.
$f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 konkav.
$f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 konvex.
$f''(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	x_0 Wendestelle.
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in x_0 lokal minimal
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in x_0 lokal maximal

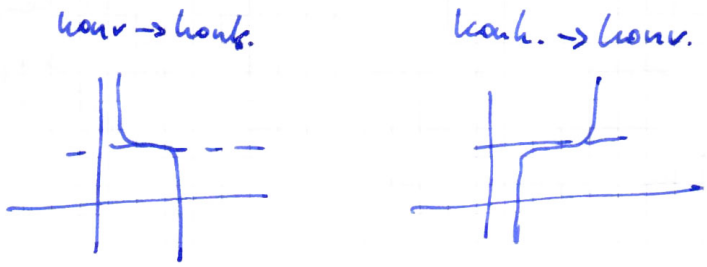
(5) Problem: $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$?
Extremstelle oder Wendestelle oder was?

HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR DAS VORLIEGEN VON EXTREMSTELLEN

Satz 4: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in Db(f)$ n-mal differenzierbare Funktion und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann gilt falls $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

a.) $n = 2, 4, 6, ...$ (also gerade), so ist x_0 lokale Extremstelle (Maximum falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).

b.) $n = 3, 5, 7, ...$ (also ungerade), so ist x_0 eine Horizontal-Wendestelle (konvex→konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$; konkav→konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).



Beweis mittels Taylor-Formal.
Oft ist auch folgendes Kriterium nützlich:

Satz 4': Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in Db(f)$, sowie $f'(x_0) = 0$. Dann:

a.) f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - \Rightarrow x_0 \text{ lokale Maximumstelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + \Rightarrow x_0 \text{ lokale Minimumstelle} \end{cases}$

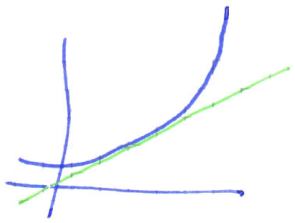
b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle

HINREICHENDE BEDINGUNG FÜR DAS VORLIEGEN EINER WENDESTELLE

Satz 5: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar an x_0 und $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann gilt falls $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und

a.) $n = 3, 5, 7, ... \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & konvex \Rightarrow konkav \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & kankav \Rightarrow konvex \end{cases}$

b.) $n = 4, 6, 8, ... \Rightarrow x_0$ keine Wendestelle, sondern sogenannte Flachstelle und Extremstelle, falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$.



Analog zu Satz 4 und 4' gibt es auch für Wendestellen ein alternatives hinreichendes Kriterium:

Satz 5': Es sei f eine 2 mal differenzierbare Funktion (in Umgebung von x_0), und es gelte $f''(x_0) = 0$. Dann:

a.) f'' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - : \text{(konvex} \to \text{konkav) Wendestelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + : \text{(konkav} \to \text{konvex) Wendestelle} \end{cases}$

b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ keine Wendestelle (sondern Flachstelle)

BEMERKUNG (zu Satz 4' und 5'):
Vorzeichenwechsel von f' bzw. f'' bei $x = x_0 \Leftrightarrow f'$ bzw. f'' hat bei x_0 Nullstelle ungerader Ordnung.

3.3.4 KURVENDARSTELLUNGEN, TANGENTEN- UND NORMALENGLEICHUNGEN, KRÜMMUNG

3.3.4.1 DARSTELLUNG EBENER KURVEN

(1) EXPLIZITE KARTHESISCHE DARSTELLUNGEN $y = f(x)$
Wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 3.3.3).

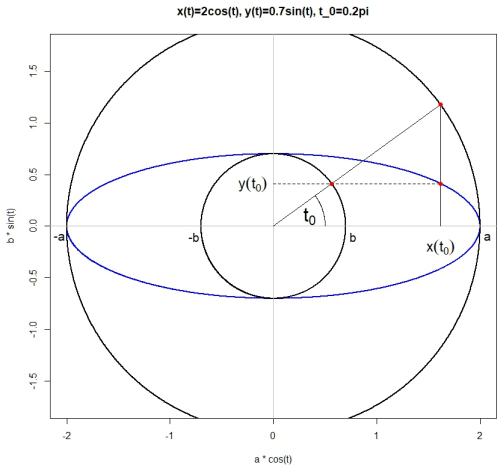
(2) IMPLIZITE KARTHESISCHE DARSTELLUNGEN $F(x, y) = 0$
Für graphische Darstellung ungünstig. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich $F(x, y) = 0$ auflösen nach y (oder x). Mehr dazu im Kapitel 5 (Differentialrechnung für Funktionen mehrer Veränderlicher).

(3) PARAMETER DARSTELLUNG $x = x(t), y = y(t), t \in I$ (kurz PD)
vektorielle Form: $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in I$

Bsp. 13:
$x = a \cos t$
$y = b \sin t$
$t \in [0, 2\pi) \quad a, b > 0$

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = a,\ y(0) = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$$
$$t = \pi \Rightarrow x(\pi) = -a,\ y(\pi) = 0$$

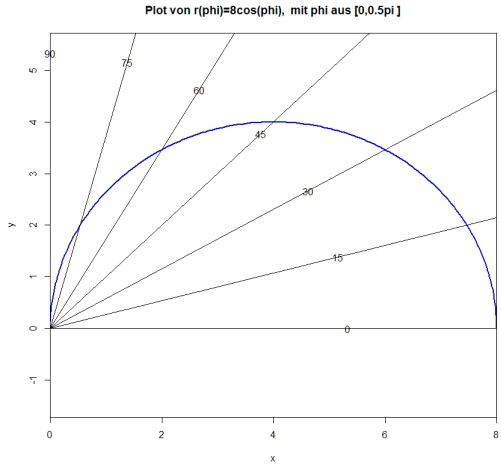
Dies ergibt eine Ellipse.



Übergang zur Parameterfreien Darstellung: t eleminieren.
$\frac{x}{a} = \cos t,\ \frac{y}{b} = \sin t$ | Quadrieren und Addieren

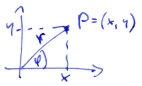
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Bsp. 14: Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius R.
PD bspw.: $x = x_0 + r\cos t \qquad y = y_0 + R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$
Parameterfreie Darstellung:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



(4) Explizite Darstellung in Polar-Koordinaten

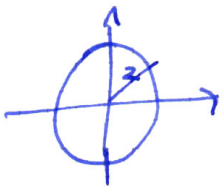
- Darstellung eines Punktes in der Ebene



$x, y \ldots$ karthesische Koordinaten
$r, \varphi \ldots$ Polarkoordinaten von P (analog Betrag und Argument einer komplexen Zahl)
$r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$
Umrechnung:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

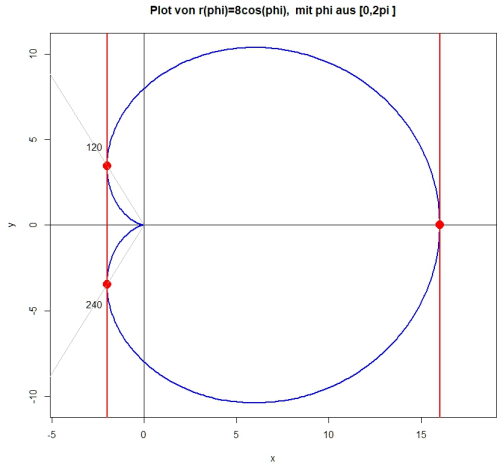
- Kurvendarstellung $r = r(\varphi) \quad , \ \varphi \in [\alpha, \beta]$
  Bsp.: $r(\varphi) = 2, \ \varphi \in [0, 2\pi)$



Für jeden Winkel $\varphi \in [\alpha, \beta]$ die Strecke $r(\varphi)$ auf den φ entsprechenden Strahl von 0 abtragen.

Bsp. 15: $r = r(\varphi) = 8\cos\varphi \quad , \ \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

φ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
$8\cos\varphi$	8	$7,73$	$6,92$	$5,66$	4	$2,07$	0



Bemerkung

- Übergang „explizite Darstellung $\rightarrow$ Parameterdarstellung“
  $y = f(x), \ x \in [a, b]$
  $\Rightarrow x = t, \ y = f(t), \ t \in [a, b]$ (t als Parameter)
- Übergang „explizite Polardarstellung $\rightarrow$ Parameterdarstellung“
  $r = r(\varphi), \ \varphi \in [a, b]$
  $\Rightarrow x = r(\varphi)\cos\varphi, \ y = r(\varphi)\sin\varphi, \ \varphi \in [a, b]$ (φ als Parameter)

Im Bsp. 15:

$x = 8\cos^2\varphi$
$y = 8\cos\varphi\sin\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

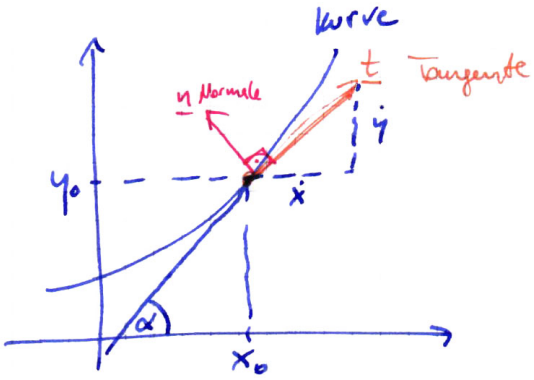
Parameterfreie Darstellung:

$$\begin{aligned} y^2 &= 64 \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{x}{8}} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1-\frac{x}{8}} \\ &= x(8-x) \\ &\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4^2 \end{aligned}$$

(Halb-)Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(4, 0)$.

3.3.4.2 TANGENTEN UND NORMALEN EBENER KURVEN

- Anstieg y' einer in PD gegebener Kurve $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$.
  Dazu sei $y = f(x)$ die explizite karthesiche Form (ohne die Elimination von t durchzuführen).
  $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{dt} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{dt}$ (Kettenregel)
  In Anwendungen in t oft die Zeit, üblicher Weise schreibt man dann:
  $\dfrac{\mathrm{d}x}{dt} =: \dot{x} \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{dt} =: \dot{y} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$
  $\dfrac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x} \ldots$
- Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, y_0),\ x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$



(Ein) Richtungsvektor der Tangente in x_0, y_0 ist gegeben durch $\underline{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$.

Für $\underline{n} = \underline{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $(\underline{t}, \underline{n}) = 0$. Also ist $\underline{n} \perp \underline{t}$ und $\underline{n}$ ist daher ein Richtungsvektor.

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$	$P_0 = (x_0, f(x_0))$	$P_0 = (x(t_0), y(t_0))$	$P_0 = (r(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0,\ r(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0$
Anstieg $m = \tan\alpha$ in P_0	$f'(x_0)$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\frac{r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0}{r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0}$
Tangentenvektor $\underline{t}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$
Normalenvektor $\underline{n}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 - r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

Tangentengleichungen:

$y = y_0 + m(x - x_0)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{t} \quad s \in \mathbb{R}$

Normalengleichungen:

$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{n} \quad s \in \mathbb{R}$

Bsp. 16: Für welche Werte des Parameters φ ist die Tangente an die Kurve $r = r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi)$ parallel zur y-Achse?

Lösung: $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$ mit der Bedingung $r'(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow -a\sin\varphi\cos\varphi - a(1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi = 0$

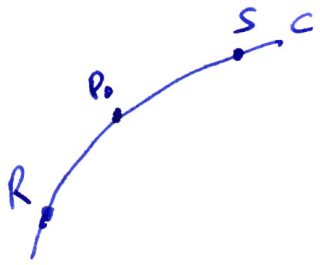
$\Rightarrow -a\sin\varphi(\cos\varphi + 1 + \cos\varphi) = 0$

$\Rightarrow \sin\varphi = 0 \vee \cos\varphi = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi_1 = 0°,\ \varphi_2 = 180°,\ \varphi_3 = 120°,\ \varphi_4 = 240°$

Allerdings entfällt φ_2, da $r'(\varphi_2)\sin\varphi_2 + r(\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0$

3.3.4.3 KRÜMMUNG EBENER KURVEN



Gegeben sei die Kurve C und der feste Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Außerdem sind zwei Punkte R und S auf der Kurve gegeben. Durch 3 Punkte $P_0,\ R$ und S im Allgemeinen eindeutig ein Kreis festgelegt.

Es sei K die Grenzlage dieses Kreises, wenn R und S in P_0 übergeben.

Es heißt dann:

K... Krümmungskreis (Schmiegkreis)
$\varkappa$ (Kappa)... Krümmung
ϱ... Krümmungsradius mit $\varrho = \dfrac{1}{|\varkappa|}$

M... Mittelpunkt des Krümmungskreises $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\varkappa} \cdot \dfrac{\underline{n}}{|\underline{n}|}$

Tabelle (Krümmungen)

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Krümmung $\varkappa$ in Punkt $P = (x, y)$	$\varkappa = \dfrac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \dfrac{r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

Bsp. 17: In welchem Punkt ist $f(x) = e^x$ am stärksten gekrümmt (d.h. maximiere $|\varkappa|$)
Lösung: $y' = e^x + y''$

$$\varkappa = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = |\varkappa|$$

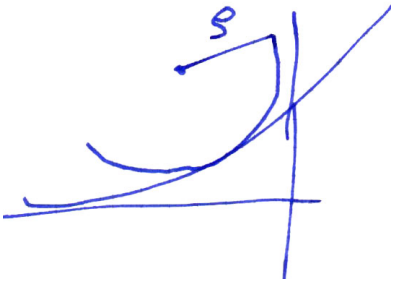
$$\frac{d|\varkappa|}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} - e^x \cdot \frac{3}{2}(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x(1+^{2x})^{\frac{1}{2}}}_{\neq 0}(1 + e^{2x} - 3e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2 \qquad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

mit $\varkappa = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}},\ \varrho = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



3.3.4.4 RAUMKURVEN

- PARAMETERDARSTELLUNG $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I$
  vektorielle Form: $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in I,\ \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- TANGENTE IM PUNKT $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$
  mit $\underline{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix},\ \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $\underline{g}(s) = \underline{r}(t_0) + s \cdot \dot{\underline{r}}(t_0),\ s \in \mathbb{R}$ ist die Tangente im Punkt P_0.

- PHYSIKALISCHE DARSTELLUNG $\underline{r} = \underline{r}(t),\ t \in I$ ... Bewegung eines Massepunktes im Raum
  $\dot{\underline{r}}(t_0)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t_0
  $\ddot{\underline{r}}(t_0)$ ... Beschleunigung zur Zeit t_0

- KRÜMMUNG $\varkappa = \dfrac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$, Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{1}{\varkappa}$

Bsp. 18: (Schraubenlinie)

$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix}$ $\quad t \geq 0,\ a > 0,\ h > 0$ (h ist Abstand zwischen zwei Schraubenlinien)

Gesucht ist die Tangente in Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$ für $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Tangente: $\underline{g}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$ $\quad s \in R$

(da die y-Koordinate in $s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$ 0 ist: $\underline{g}$ ist parallel zur x-z-Ebene)

3.3.5 NEWTON-VERFAHREN ZUR NULLSTELLENBESTIMMUNG

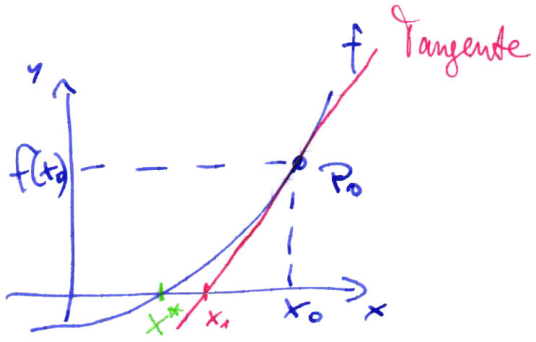
Satz 6: Es sei x^* eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für ein geeignetes Intervall $I = (x^* - r, x^* + r)$ gelte $f'(x) \neq 0$ und $\left|\dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq k < 1$ für alle $x \in I$.

Dann konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in I$ die mittels $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$ festgelegte Folge gegen x^*, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Außerdem gilt $|x^* - x_n| \leq \dfrac{k}{1-k}|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

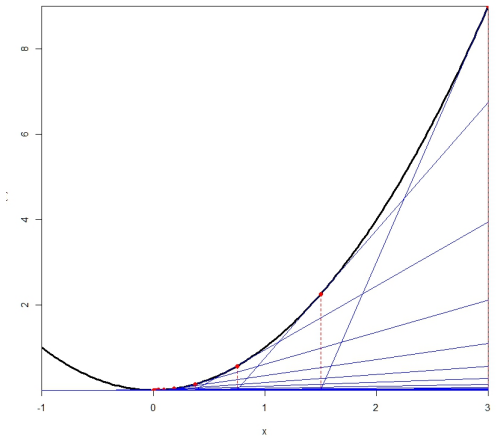
Diskussion:

- Geometrische Veranschaulichung:



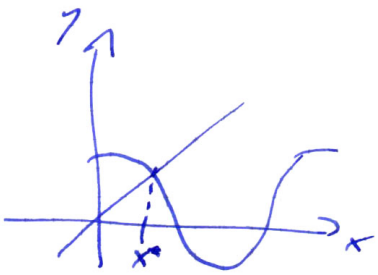
Tangente in P_0 :
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
x_1 ... Nullstelle der Tangente

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



- Zur Wahl des Startwertes x_0:
  Falls in I gilt $f''(x) > 0$, dann ist ein x_0 mit $f(x_0) > 0$ günstig (bzw. bei $f''(x) <=$ ein $f(x_0) < 0$).
- Praktisches Vorgehen:
  Abbruch falls $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

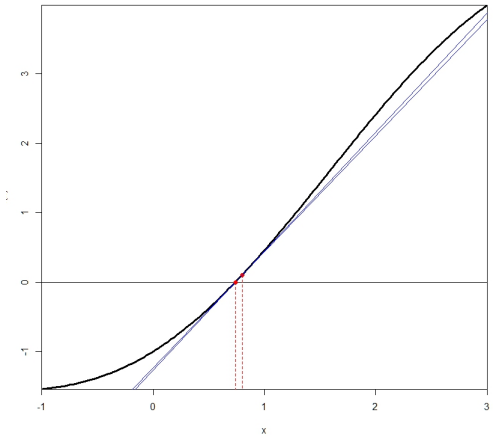
Bsp. 19: Gesucht sind Lösungen von $f(x) = \cos(x) = x \Leftrightarrow x - \cos(x) = 0$. Gesucht ist nun eine Nullstelle von f.
Start $x_0 = 0,8$ (nur ein Beispiel)

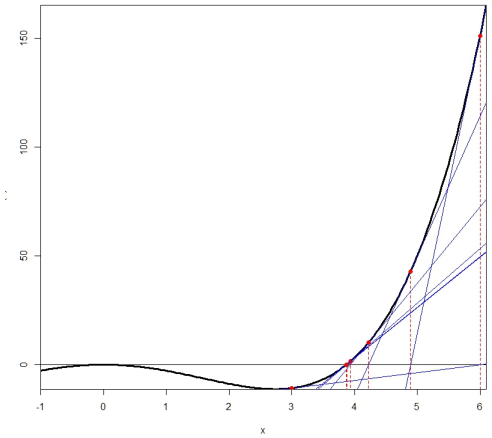


$$f'(x) = 1 + \sin(x)$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

n	x_n
0	$0,8$
1	$0,73985$
2	$0,73908526$
3	$0,73908513322$
4	$0,73908513322\ldots$

$\Rightarrow x^* = 0,739085$


x
-1
0
1
2
3

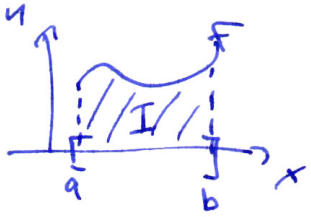

x
-1
0
1
2
3
4
5
6
0
50
100
150

4 INTEGRALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

4.1 DER INTEGRALBEGRIFF

4.1.1 DAS BESTIMMTE INTEGRAL

Problem:
GEGEBEN: Kurve $y = f(x),\ x \in [a, b]$ und $f(x) \geq 0$.
GESUCHT: Flächeninhalt I unter der Kurve

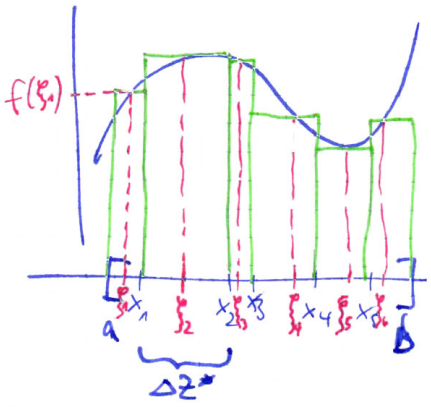


VORGEHEN:

- Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < n_n = b$
- In jedem Teilintervall Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{in}, x_i]$ wählen. Dies ergibt die Zerlegung Z^* (Z mit Zwischenstellen).
- $\Delta(Z^*) := \max\limits_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1} = \ldots$ Länge des größten Teilintervalls
- Approximation von I durch die Summe von Rechteckflächen:

$$S(Z^*, f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

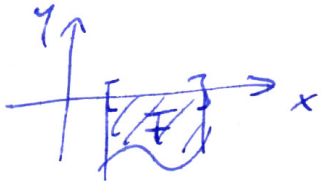
$S(Z^*, f)$ heißt Riemann-Summe. Sie ist abhängig von der Zerlegung Z^*.



Def. 1 Die Funtkion f heißt (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$ falls für jede Zerlegungsfolge Z_μ^* von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{\mu\to\infty} \Delta(Z_\mu^*) = 0$ gilt: $\lim\limits_{\mu\to\infty} S(Z_\mu^*, f) = I$. Die Zahl I heißt dann bestimmtes Integral von f über $[a,b]$. Bezeichnung: $i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Diskussion:

- Def. 1 basiert auf der Forderung $f(x) \geq 0$. Falls $f(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt im Falle der Integrierbarkeit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$:



  $\Rightarrow$ Flächeninhalt $F = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Man definiert:
  $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$
  $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (b > a)$

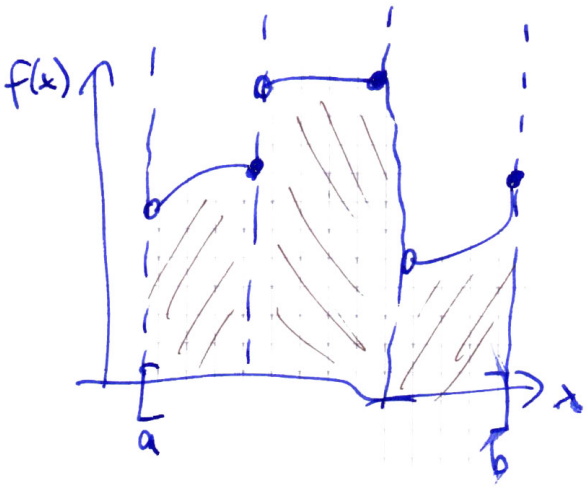
- Eigenschaften des bestimmten Integrals:
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b c_1 u(x) + c_2 v(x)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Satz 1: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

Diskussion:

- Falls f stückweise stetig ist, mit endlich vielen Sprungstellen, so ist f ebenfalls integrierbar (Integration von Sprungstelle zu Sprungstelle).



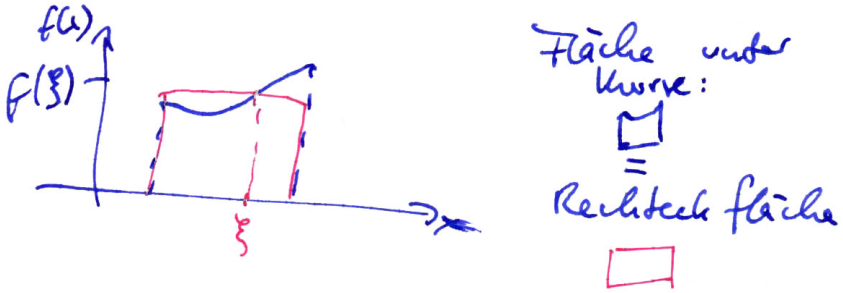
- Nicht integrierbar ist bspw. $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 0 & x \text{ rational} \end{cases}$

4.1.2 STAMMFUNKTION UND UNBESTIMMTES INTEGRAL

Satz 2: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit:

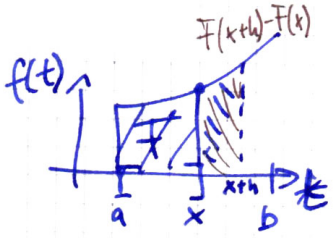
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Anschaulich:



Wir nennen $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ den Integralmittelwert von f auf $[a,b]$.

INTEGRAL MIT VARIABLER OBERER GRENZE:
Wir betrachten $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =: F(x)$



Satz 3: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Beweis:
$\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \overset{\text{Satz 2 (mit } \xi\in(x,x+h))}{=} \dfrac{f(\xi)\cdot(x+h-x)}{h} = f(\xi) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ da f stetig.
$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Def. 2: Die Funktion F heißt STAMMFUNKTION von f (auf $[a,b]$), wenn gilt $F'(x) = f(x)$.

Diskussion: Ist F eine Stammfunktion, so ist auch $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion.

Def. 3: Die Menge $\{F(x)+C | C \in \mathbb{R}$ aller Stammfunktionen von f, wobei F beliebige Stammfunktion von f ist, heißt unbestimmtes Integral von f.
Bezeichnung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

4.1.3 HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG (HDI)

Satz 4: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F beliebige Stammfunktion von f.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beweis: Satz 3 liefert $F_1(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist Stammfunktion von f. Also gilt $F(x) = F_1(x) + k$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_1(b) + k - \underbrace{F_1(a)}_{=0} - k = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Diskussion:

(1) $\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{Flächeninhaltsproblem,}\\ \text{Integralrechnung}}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\text{Stammfunktion,}\\ \text{Umkehrung der Differentialrechnung}}}$

Dieser Term ist also der Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung.

(2) Symbolik: $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int \mathrm{d}F(x)}_{F(x)+C} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

(3) Aus Tabellen zur Differentiation lassen sich Integrationsregeln ableiten.

Beispiele:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$

$\Leftrightarrow \int -\sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C^* \quad | \cdot (-1)$

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \underbrace{C}_{=-C^*}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^\alpha$

$\Leftrightarrow \int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ (falls $\alpha \neq -1$)

4.2 INTEGRATIONSMETHODEN

4.2.1 SUBSTITUTION

Zu berechnen ist $\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$. Bekannt sei dabei die Stammfunktion F von f. Dann gilt:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Subst.}\\ u=g(x)}}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C \overset{u=g(x)}{=} F\big(g(x)\big) + C$$

Substitution $u = g(x)$ impliziert $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$.
MERKE: Anwendung dieser Methode ist zweckmäßig, wenn der Integrand das Produkt eine Verknüpfung zweier Funktionen mit der Ableitung der inneren Funktion ist und eine Stammfunktion für die äußere Funktion bekannt ist.

Bsp. 1: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\ln x}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=\ln x \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{x}\mathrm{d}u}}{=} \int \underbrace{\sqrt[3]{u}}_{u^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(\ln x)^{\frac{4}{3}} + C$

Bsp. 2: $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=-x^2 \\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{2x}}}{=} \int xe^u \frac{\mathrm{d}u}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Bsp. 3: (Substitution bei bestimmten Integral)

- 1. Variante: Grenzen ersetzen
  $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=1+x^2 \\ dx=\frac{\mathrm{d}u}{2x}}}{=} \int_1^9 x\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$
  Grenzen in Substitution einsetzen $u = 1 + x^2 \Rightarrow u_{unt} = 1 + 0^2 = 1 \quad u_{ob} = 1 + \sqrt{8}^2 = 9$
- 2. Variante: Erst unbestimmtes Integral lösen
  $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
  Dann Grenzen einsetzen:
  $I = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

Bsp. 4: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$
(Zähler = Ableitung des Nenners)
Nutze dazu die Substitution $u = f(x),\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
$\Rightarrow \displaystyle\int \cdots = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$

Bsp. 5: (lineare Substitution)
Allgemein: $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=ax+b \\ \frac{du}{dx}=a}}{=} \int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} \overset{\substack{F\text{: Stammfkt.} \\ \text{von } f}}{=} \frac{1}{a}\cdot F(u) + C$

(a) $\displaystyle\int \cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$

(b) $\displaystyle\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2}e^{-2x} + C$

(c) $\displaystyle\int (3x+4)^6\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}(3x+4)^7 + C$

(d) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\,\mathrm{d}x = 2\cdot -\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) + C$

Diskussion: Neben diesen „natürlichen“ und leicht erkennbaren Substitutionen sind weiter Substitutionen durch die Einführung von „künstlichen“ Variablen möglich:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{x=f(t)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}(t)}}{=} \int f(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$$

Dies entsprecht der Substitutionsregel, von rechts nach links gelesen. Falls die rechte Seite davon integrierbar ist (mit Stammfunktion H), dann:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)+C = H\big(\varphi^{-1}(t)\big)+C \qquad \text{(falls } \varphi^{-1} \text{ existiert)}$$

Bsp. 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{x=\sinh(t)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cosh(t)\\ \cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1}}{=} \int \frac{1}{\cosh(t)}\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t+C = \operatorname{arcsinh}(x)+C$$

Für weitere geeignete Substitutionen siehe Integrationstabelle.

4.2.2 PARTIELLE INTEGRATION

Produktregel der Differentiation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)\cdot v(x)\big) = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow u(x)v(x)\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$$

Bsp. 7:

(a) $$\int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(2x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

$u'(x)=1 \qquad v(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

(b) $$\int \underbrace{x^3}_{v'}\underbrace{\ln x}_{u} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C = \frac{1}{4}x^4\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)++C$$

MERKE: Typische Anwendungsfälle für partielle Integration (mit $p(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$
- $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$
- $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$

aber (mit $\ln(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int x^{\alpha}\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Bsp. 8:

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=\arctan(x)\\ v'\equiv 1}}{=} x\cdot\arctan(x) - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C$$

$u' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad v = x$

4.2.3 INTEGRATION GEBROCHEN RATIONALER FUNKTIONEN

Gegeben: Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Integration erfolgt in 5 Schritten:

(1) Falls f unecht gebrochen: Polynomdivision erhalten dann $f(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\dfrac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}}$

(2) Nullstellen von q ermitteln. Dann Zerlegung q:
$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\dots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\dots$
k_i: reelle Nullstellen $\qquad m_i$: nicht reell zerlegbar
Dabei kürzt man eventuelle gemeinsame Faktoren in r und q heraus.

(3) ANSATZ FÜR DIE PARTIALBRUCHZERLEGUNG
$\dfrac{r(x)}{q(x)}$ =Summe von Partialbrüchen
Jeden Faktor der Form $\begin{cases}(x-\alpha)^k\\ (x^2+px+q)^m\end{cases}$ der Gleichung entspricht der Anteil

$$\begin{cases}\dfrac{A_1}{x-\alpha}+\dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\dfrac{A_2}{(x-\alpha)^k}\\ \dfrac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\dfrac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}\end{cases}$$ in dieser Summe.

Bsp. 9:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2+4}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+5}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+2}+\frac{Gx+H}{(x^2+2x+2)^2}\end{aligned}$$

Beachte: x^2+2x+2 ist reell nicht weiter zerlegbar, Nullstelle: $1\pm i$.

(4) Ermittlung der Koeffizienten durch
- Multiplikation des Ansatzes der Partialbruchzerlegung mit $q(x)$
- Kombination der folgenden beiden Methoden
  (a) Einsetzen der reellen Nullstellen
  (b) Koeffizientenvergleich

  (falls q nur reelle Nullstellen hat, recht Methode a.)

(5) Integration der Partialbrüche

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-\alpha)^j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\ln(|x-\alpha|)+C & j=1\\ \dfrac{1}{1-j}(x-\alpha)^{1-j}+C & j=2,3,4,\dots\end{cases}$

(b) $\int \frac{3x+C}{(x^2+px+q)^j}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+q)}{(x^2+px+q)^j} + \frac{C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^j}\,\mathrm{d}x$

- $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^2}\,\mathrm{d}x$: Nutze Substitution.
- $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^j} \overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^j}\,\mathrm{d}x \overset{u=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{1}{(u^2+a^2)^j}\,\mathrm{d}x$

  $\begin{cases} j=1 & \text{Stammfunktion siehe Merkblatt} \\ j>1 & \text{siehe weitere Formelsammlung (selten)} \end{cases}$

Bsp. 10: $I = \int \frac{3x+4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$

- echt gebrochen
- Nullstellen des Nenners: $x_1 = -3,\ x_2 = 1$
  $\Rightarrow x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3x+4}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \qquad |\cdot (x+3)(x-1)$$
$$3x+4 = A(x-1)+B(x+3)$$

Einsetzen der NS:

$x_1:\quad -5 = A\cdot(-4) \Rightarrow A = \frac{5}{4}$

$x_2:\quad 7 = B\cdot 4 \Rightarrow B = \frac{7}{4}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{5}{4}}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{7}{4}}{x-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{4}\ln(|x+3|) + \frac{7}{4}\ln(|x-1|) + C$$

Bsp. 11: $I = \int \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,\mathrm{d}x$

- echt gebrochen
- Nenner reell nicht weiter zerlegbar (denn Nullstellen von $x^2-4x+13$ sind $x_{1/2} = 2\pm 3i$)
- Partialbruchzerlegung:

$$\frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+13} \quad |\cdot \text{Nenner}$$
$$7x^2-10x+37 = A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1)$$
$$= (A+B)x^2+(-4A+B+C)x+(13A+C)$$

Einsetzen der Nullstelle $x=-1$: $54 = 18A \quad \Rightarrow A = 3$

Koeffizientenvergleich x^2: $7 = A+B \quad \Rightarrow B = 4$

x^0 $13A+C) \quad \Rightarrow C = -2$

$$\Rightarrow \int \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\frac{3}{x+1}}_{a} + \underbrace{\frac{4x-2}{x^2-4x+13}}_{b}\,\mathrm{d}x$$

$$a: \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+1| + C_1$$

$$b: \int \frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2x-4)-2+8}{x^2-4x+13} = 2\underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}}_{I_1} + \underbrace{\frac{6}{x^2-4x+13}}_{I_2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst.}}{=} \ln|x^2-4x+13| + C_2$$

$$I_2 = 6\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+9} = 6\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3^2} = 6\cdot\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C_3 = 2\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_3$$

$$\Rightarrow I = 3\ln|x+1| + 2\ln\left(x^2-4x+13\right) + 2\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_4$$

4.2.4 INTEGRATION VON POTENZREIHEN

Satz 1: Es sei $f: (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ die Grenzfunktion der Potenzreihe (mit Konvergenzradius r). Dann ist $F: (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion von f (gliedweises Integrieren im Konvergenzintervall).

Bsp. 12:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad |x| < 1$ (siehe Übung, nutze geometrische Reihe)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + C_1$$

Wir wissen aber auch: $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C_2$

$\Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + C_3$ mit $C_3 = 0$ (setze $x = 0$ ein) und $|x| < 1$.

Bsp. 13: Gesucht ist Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} - \frac{(t^2)^3}{3!} + \ldots\right)\mathrm{d}t$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

Diskussion:

- $\int e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ nicht geschlossen auswertbar.
- Für nicht zu große x ist die Reihendarstellung zur Auswertung von F gut geeignet.
  z.B. $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 8!}}_{0{,}746824\cdots} - \ldots$

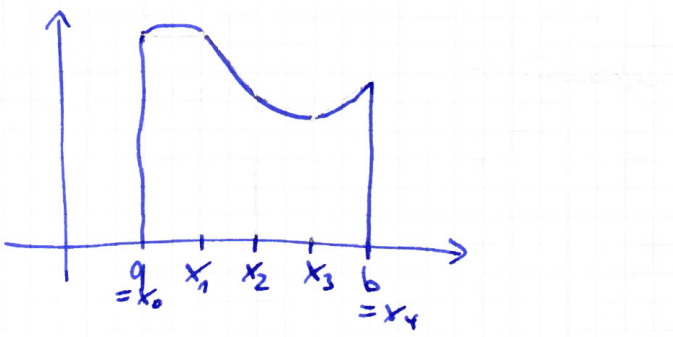
  |Fehler| $< \frac{1}{19\cdot 9!} = 1{,}4504\cdot 10^{-7}$ (vgl. Satz über Leibnitz-Kriterium)

4.3 NUMERISCHE INTEGRATION

ZIEL: Berechne $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ falls Stammfunktion „kompliziert“ oder nicht elementar angebbar.

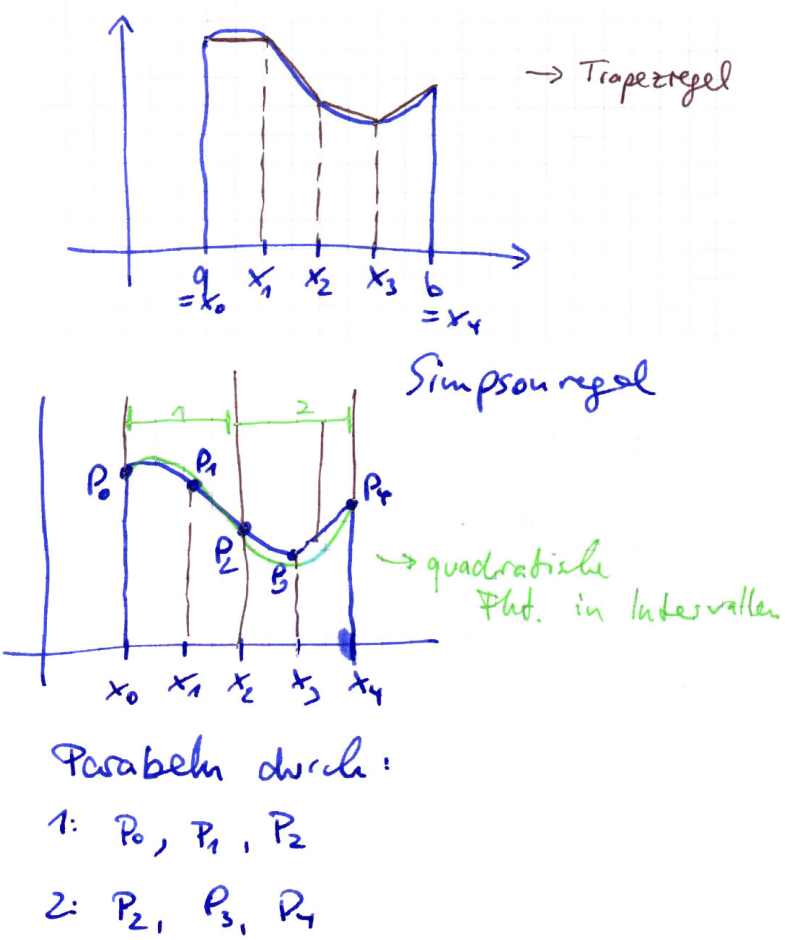
PRINZIP:

(a) Zerlegung von $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}(b-a)$
$\Rightarrow$ Teilpunkte sind $x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$, $y_k = f(x_k)$



(b) Ersetze $f(x)$ über den Teilintervallen durch einfachere Funktionen.
z.B.:

- lineare Funktionen $\rightsquigarrow$ Trapez Regel
- quadratische Funktionen $\rightsquigarrow$ SIMPSON-Regel



Als Näherung für I ergibt sich für die Simpson-Regel:

$$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right)$$
falls n gerade ist.

Diskussion:

(1) Fehlerabschätzung:
$$I = S_n(h) - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \quad a < \xi < b$$
(falls $f^{(4)}$ stetig in $[a, b]$)

(2) Simpson-Regel ist für Polynome einschließlich Grad 3 exakt.

(3) Praktische Durchführung: Schrittweitenhalbierung
Startwert: $S^{(1)} = S_n(h)$ für geeignetes h. $S^{(2)} = S_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$, $S^{(3)} = S_{4n}\left(\frac{h}{4}\right)$, usw. bis sich die Ziffern in gewünschter Genauigkeit nicht mehr ändern.

Bsp.: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$n = 4,\ h = 0,25$

k	x_k	y_0, y_n	y_{2j+1}	y_{2j}
0	0	1		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

$$S_4(0,25) = \frac{0,25}{3}(1,367879 + 4 \cdot 1,509196 + 2 \cdot 0,778801)$$

4.4 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

- Vorbetrachtung:
  Bisher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wobei $[a, b]$ endliches Integral auf f stückweise stetig auf $[a, b]$ (daher beschränkt)
- 2 Erweiterungen:
  (1) unendliches Intervall $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ oder $(-\infty, \infty)$
  (2) Funktion f unbeschränkt (Unendlichkeits- bzw. Polstellen)

Unendliches Intervall (zu 1.)

(a) $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to\infty} \int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x$
analog:
$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ (bspw. $c = 0$).

Diskussion:

(1) Falls die Grenzwerte existieren, so heißt das Integral konvergent, sonst divergent.

(2) Ein berühmtes Beispiel ist die Γ-Funktion:
$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$
Eigenschaft: $\Gamma(n) = (n-1)!$ falls $n \in \mathbb{N}$

Bsp. 1:

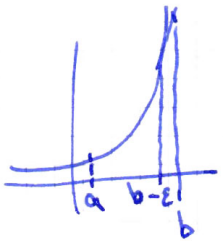
(a) $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(-e^{-A} + e^0\right) = 1$

(b) $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[\sin(x)\right]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(\sin A - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right)$
Grenzwert existiert nicht $\Rightarrow$ Integral unbestimmt divergent.

(c) $\int_1^\infty = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^A = \lim_{A\to\infty} \left(\ln A - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \infty$
$\Rightarrow$ bestimmt divergent

Unbeschränkter Integrand (zu 2.)

(a) bspw. Unendlichkeitsstellen bei b:
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$



(b) falls Unendlichkeitsstelle x_0 im Inneren von $[a,b]$ liegt:
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$
... und nutzen nun a.):
$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Bsp. 2:
$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 4$

Unendliches Intervall und unbeschränkter Integrand (Kombination von 1. und 2.)

Bsp. 3

$$I = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

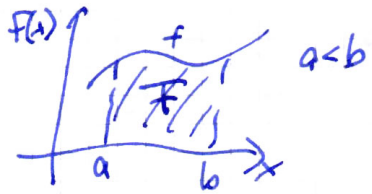
mit $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \underbrace{\dots}_{\text{Subst. } t=\sqrt{x-1}} = 2\arctan\sqrt{x-1} + C$:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} + \lim_{a\to\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^2 + \lim_{A\to\infty} \left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_2^A \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{\varepsilon}) + \lim_{A\to\infty} (2\arctan\sqrt{A-1} - 2\arctan 1) \\
&= \underbrace{\lim_{A\to\infty} 2\arctan\sqrt{A-1}}_{\pi} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow} 2\arctan\sqrt{\varepsilon}}_{0} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

4.5 ANWENDUNGEN

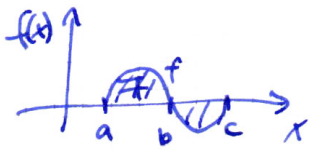
4.5.1 GEOMETRISCHE ANWENDUNGEN

4.5.1.1 INHALTE EBENER FLÄCHEN



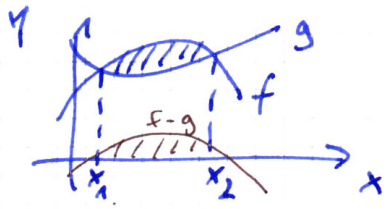
- mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$:

$$F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- mit $a < b < c$:

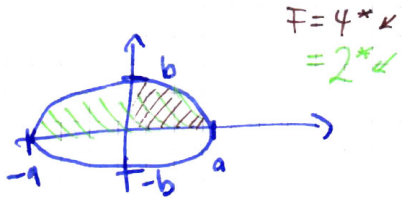
$$F = \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- mit $f(x)$: obere Funktion und $g(x)$: untere Funktion:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

Bsp. 1: Gesucht ist der Flächeninhalt F des von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ begrenzten Bereichs.

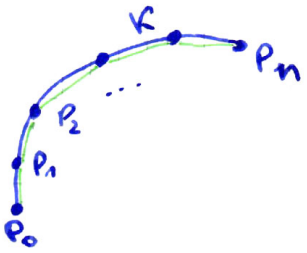


$$y = \pm b\sqrt{a - \frac{x^2}{a2}}$$

$$F = 4 \cdot \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a}}\,\mathrm{d}x = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst. } x = a\sin t}{=} \frac{4b}{a}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= \frac{4b}{a}\frac{1}{2}a^2 \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot ab$$

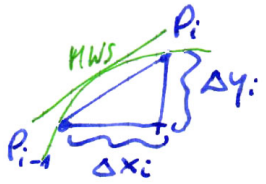
4.5.1.2 BOGENLÄNGE

Bogenlänge ebener Kurven



Kurve K mit Parameterdarstellung. $x = x(t) \quad y = y(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

- Vorgehen: Approximieren durch Streckenzug, dann Verfeinerung
  Länge des Streckenzugs: $\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$



  $\Rightarrow$ (Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(u_i))^2 + (\dot{y}(v_i))^2} \cdot \Delta t_i$
  mit $u_i, v_i \in (t_{i-1}, t_i)$
  Verfeinerung:
  $\int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$

Diskussion:

- Bogenlänge der Kurve $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zwischen α und t ist

$$s = \int_\alpha^t \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2}}_{|\dot{r}(u)|} \,\mathrm{d}u =: f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = |\dot{r}(t)| \Rightarrow \mathrm{d}s = |\dot{r}(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$ (heißt Bogenelement)

- Tabelle (Bogenlänge ebener Kurven)

Kurvendarstellung	Bogenlänge s, Bogenelement $\mathrm{d}s$
$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}$
$y = f(x),\ x \in [a, b]$	$s = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s}$
$x = g(y),\ y \in [c, d]$	$s = \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}s}$
$r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}s}$

Bogenlänge von Raumkurven

Gegeben sei Kurve Kmit Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$.
Die Bogenlänge berechnet sich dann mittels

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

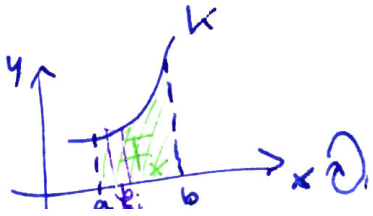
Bsp. 2 (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ \dfrac{h}{2\pi}t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ \dfrac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t}_{a^2}} + \frac{h^2}{(2\pi)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \end{aligned}$$

4.5.1.3 VOLUMEN VON ROTATIONSKÖRPERN



(a) Gegeben:

- Kurve K mit $y = f(x),\ x \in [a, b]$
- Das Flächenstück F_x zwischen Kurve und x-Achse rotiere um die x-Achse.

Gesucht:

- Volumen V_x des dabei erzeugten Körpers

Es gilt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$

(Idee: Approximation von F_x durch Rechteckflächen
$\overset{Rotation}{\rightsquigarrow}$ Zylinderscheiben $V_\alpha \approx \sum_i \pi(f(\xi_i))^2 \Delta x_i$

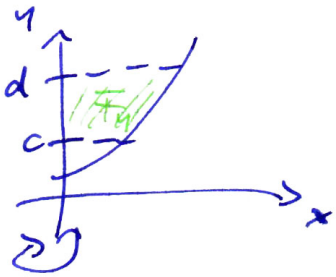
Grenzübergang: $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$)

Diskussion:

a) Allgemein gilt $V_x = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x \quad (a < b)$

b) Falls K in Parameterform gegeben $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha...t...\beta$, dann ergibt sich $V_x = \pi \int_\alpha^\beta (y(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$, wobei ... (die Orientierung) so zu wählen ist, dass $a := x(\alpha) < x(\beta) = b$ gilt. Unter Umständen kann $\alpha < \beta$ sein.

(b) Gegeben: Kurve $x = g(y),\ y \in [c, d]$



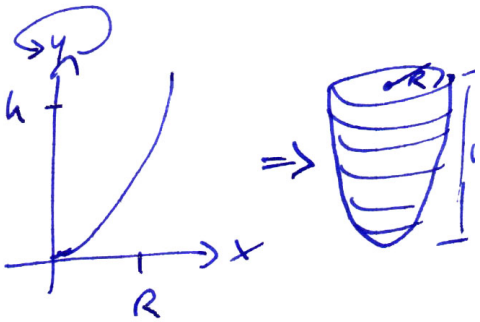
Gesucht: Volumen V_y bei Rotation von F_y um y-Achse.

$V_y = \pi \int_c^d x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_c^d (g(y))^2 \,\mathrm{d}y$

Für Parameterdarstellung:

$V_y = \pi \int_\alpha^\beta (x(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}y}$, wobei $c = y(\alpha) < y(\beta) = d$

Bsp. 3: Gesucht ist das Volumen eines Rotationsparaboloids der Höhe h und mit Basisradius R.

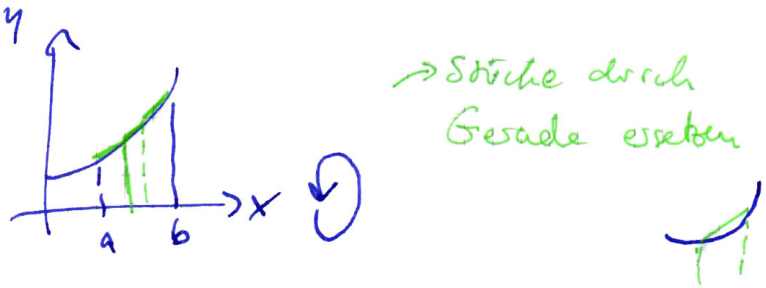


Kurve: $y = ax^2,\ h = aR^2 \Rightarrow a = \dfrac{h}{R^2}$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^h \frac{y}{a} \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} y \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h y \,\mathrm{d}y = \frac{\pi R^2}{h} \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{\pi R^2 h}{2} \end{aligned}$$

4.5.1.4 MANTELFLÄCHEN VON ROTATIONSKÖRPERN

(a) Gegeben: Kurve K mit $y = f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$
Gesucht: Die von der Kurve K, bei Rotation um x-Achse erzeugte Rotationsfläche M_x.



$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

(Approximation der Kurve K durch Polygonzug
$\overset{Rotation}{\rightsquigarrow}$ Kegelstumpffläche

$$M_x \approx \sum_i 2\pi f(\xi_i) \Delta s_i$$

$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s} \text{ (Bogenelement))}$$

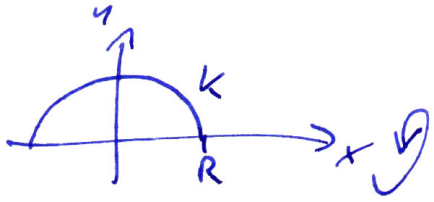
Allgemein gilt: $M_x = 2\pi \displaystyle\int_a^b y \,\mathrm{d}s$

(b) Gegeben: Kurve $x = g(y) \geq 0,\ y \in [c, d]$
Gesucht: Mantelfläche bei Rotation um die y-Achse.

$$M_y = 2\pi \int_K x \,\mathrm{d}s = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} \,\mathrm{d}y$$

Für Parameterdarstellung:
$M_y = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$ mit $\alpha \le t \le \beta$

Bsp. 4: Kugeloberfläche

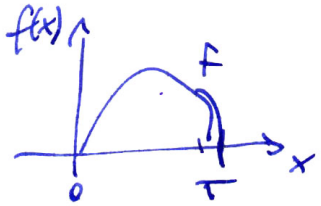


Halbkreis K soll um x-Achse rotiert werden.
$x = R \cdot \cos t$
$y = R \cdot \sin t$
$t \in [0, \pi]$
$\dot{x}(t) = -R\sin t \qquad \dot{y}(t) = R\cos t$

$$\begin{aligned} M_x &= 2\pi \int_K y\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^\pi y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_0^\pi R\sin t \cdot R\,\mathrm{d}t = 2\pi R^2\,[-\cos t]_0^\pi \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

4.5.1.5 FOURIER-REIHEN

Gegeben: Funktion $f(x),\ x \in [0, T]$



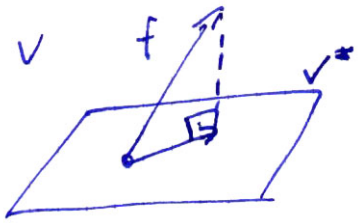
Gesucht: Reihendarstellung mit trigonometrischen Funktionen der Periode $T,\ \frac{T}{2},\ \frac{T}{3}, \ldots$
d.h. (mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$):
$\cos(\omega x),\ \cos(2\omega x),\ \cos(3\omega x), \ldots$
$\sin(\omega x),\ \sin(2\omega x),\ \sin(3\omega x), \ldots$
Ansatz ist daher:
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{a} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$, wobei die Koeffizienten $a_k,\ b_k,\ k \ge 0$ zu ermitteln sind.
Motivation ist: Approximation von f zum Zwecke der Speicherplatzreduzierung (Abgespeichert werden i.A. nur wenige der Koeffizienten a_k und b_k. Das gilt auch dann, wenn f in diskreter Form vorliegt, d.h. in Form von Messwerten y_k an vielen Messstellen x_k.)
Vorgehensweise:

(1) Betrachte zunächst die endliche Reihe $f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$.

Ziel ist: a_k und b_k so wählen, dass f_n möglichst gute Approximation von f ist.

(2) Approximation in Vektorräumen mit Skalarprodukt

- Es sei V ein Vektorraum. Das Skalarprodukt (f, g) ist eine Abbildung von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
  (a) $(f, f) > 0$ für alle $f \neq 0$
  (b) $(f, g) = (g, f)$ für alle $f, g \in V$ (Symmetrie)
  (c) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g.h.)$ für $f, g, h \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Linearität)
- Die Norm von f (oder Betrag von f) ist $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ für $f \in V$
- f und g orthogonal $:\Leftrightarrow (f, g) = 0$
- Beispiele:
  (a) $V = \mathbb{R}^n,\ (\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
  (b) $C(a, b)$ ... Menge der auf $[a, b]$ stetigen reellwertigen Funktionen mit Skalarprodukt: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
- Aufgabe: Approximation von $f \in V$ durch $f^* \in V^*$ wobei $V^* \subseteq V$ ein m-dimensionaler Unterraum ist, mit orthogonaler Basis $e_1, \ldots, e_m$ (d.h. $(e_i, e_j) = 0$ falls $i \neq j$). Gesucht ist also dasjenige $f^* \in V^*$, für welches $\|f - f^*\|$ minimal wird.



d.h. f^* ist die orthogonale Projektion von f auf V^*

Satz 1: Die orthogonale Projektion f^* von f auf V^* ist gegeben durch: $f^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$,

wobei $\alpha_i = \dfrac{(f, e_i)}{(e_i, e_i)},\ i = 1, .., n$

(3) Übertragung auf $C(O, T),\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \to \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

- Man kann zeigen, dass die Funktion
  $\underbrace{1}_{g_0}, \underbrace{\cos(\omega x)}_{g_1}, \underbrace{\cos(2\omega x)}_{g_2}, \cos(2\omega x), \ \ldots, \underbrace{\sin(\omega x)}_{h_1}, \underbrace{\sin(2\omega x)}_{h_2}, \sin(2\omega x), \ \ldots$
  in $C(O, T)$ orthogonal sind.
  z.B. $(g_0, g_1) = \int_0^T 1 \cdot \cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^T = 0$
- Außerdem gilt $(g_0, g_0) = T,\ (g_k, g_k) = \dfrac{T}{2} = (h_k, h_k)$ mit $k \in \mathbb{N}$

(4) Damit ergibt die Projektion von $f \in C(0, T)$ in $V^* = L(g_0, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)$ folgende Koeffizienten:
$a_k = \dfrac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)} = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x$

$$b_k = \frac{(f, h_k)}{(h_k, h_k)} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x$$
(bei der Approximation in der Ausgangsgleichung f_n)

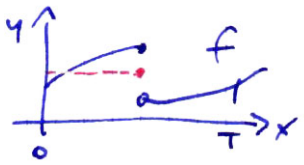
(5) Frage: $f_n \to f$ falls $n \to \infty$?

Satz 2: Seien f und f' auf $[0,T]$ stückweise stetig mit höchstens endlich vielen, endlichen Sprungquellen, dann gilt an allen Stetigkeitsstellen von f:

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x))}_{\lim_{n\to\infty} f_n(x)} \text{ mit}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Für die Sprungstellen x_S gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_S) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\nearrow x_s} f(x) + \lim\limits_{x\searrow x_S} f(x)\right)$

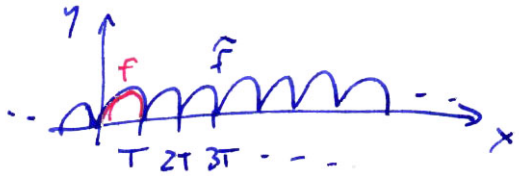


→ geht gegen die Mitte des Sprungstellen

Also: Ja, $f_n \to f$ falls $n \to \infty$.

Bemerkung:

a) Die Vorstehenden Ausführungen gelten automatisch für die periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ einer zunächst auf $[0,T]$ definierten Funktion f



b) Im Fall der periodischen Fortsetzung kann das Integrationsintervall $[0,T]$ durch beliebiges Intervall der Länge T ersetzt werden, z.B. $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

c) Ist f symmetrisch gilt (vereinfachend):

f gerade	$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x,\ a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x,\ b_k = 0$
f ungerade	$a_0 = 0,\ a_k = 0,\ b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x$

d) Amplitudenspektrum

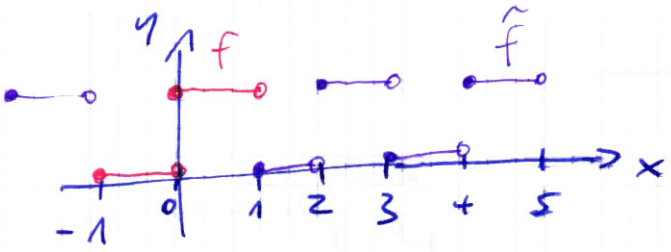
$A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

... Amplituden der Schwingungen, die sich durch Zusammenfassung der Sinus- und Cosinusanteile gleicher Frequenz ergeben.
(Möglichkeit der Verstärkung/Dämpfung der Schwingung)

Die Fourier Reihe lässt sich mit diesem A_k auf folgende Form bringen:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx - \varphi_k) \text{ mit } A_0 = a_0 \text{ und } \varphi_k = \arccos\left(\frac{a_k}{A_k}\right) \quad k \geq 1$$

Bsp. 6: $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $\tilde{f}$ periodische Fortsetzung



Gesucht: Fourier Reihe zu f mit $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$

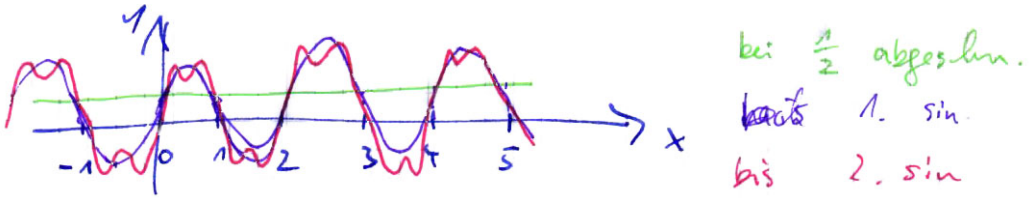
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(k\pi x) = \frac{1}{k\pi}\left[\sin(k\pi x)\right]_0^1 = 0$$

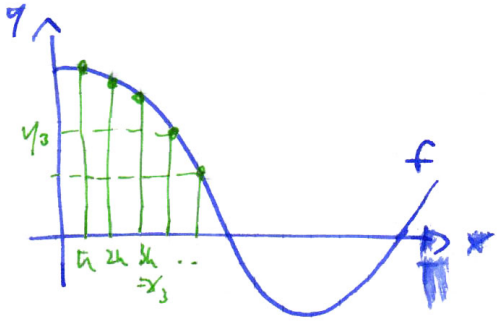
$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k\pi}\left[\cos(k\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi}(cos(k\pi) - 1)$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{k\pi} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \ldots\right) \quad x \in RR \setminus \mathbb{Z}$$



Diskreter Fall: Gegeben $y = f(x)$, $x \in [0, T]$ ausgewertet (gemessen) an N Messstellen (wobei N gerade) z.B. Messung alle $\frac{1}{100}\text{sec}$ = Samplingrate 100 Hz (bei Audio CDs $44,1$ kHz



$x_j = j \cdot h = j \cdot \frac{T}{N}$ für $j = 0, \ldots, N-1$

$y_j = f(x_j)$

- Mit Ansatz von stetigen Funktionen für $n \leq \frac{N}{2}$ führt im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ mittels Satz 1 auf:

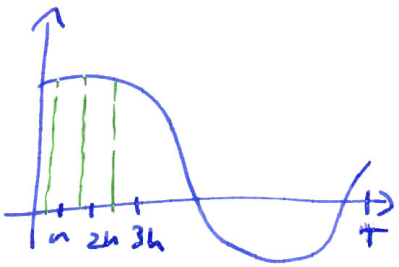
$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j,$$
$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \cos(k\omega x_j),$$
$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \sin(k\omega x_j)$$

- Im Fall $2n = N$ ergibt sich keine Approximation, sondern eine exakte Darstellung des Vektors $\underline{y} = (y_j)_{j=0}^{N-1}$ mit einer anderen Basis.
  Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ lässt sich der Ansatz mit komplexen Koeffizienten c_k umschreiben:
  $f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega kx}$ und damit $y_j = f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c - ke^{i\frac{2\pi}{N}j\cdot k} \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1)$
  In Matrix-Schreibweise:
  Sei $w := e^{i\frac{2\pi}{N}s}$ (eine von N Lösungen der Kreisgleichung $Z^N = 1$)
  $\underline{F} = \left(w^{jk}\right)_{j,k=0}^{N-1}$
  $\Rightarrow \underline{y} = \underline{F}\,\underline{c}$ (inverse diskrete Fourier Transformation IDFT)

- Man kann zeigen, dass $\underline{F}$ regulär ist mit $\underline{F}^{-1} = \frac{1}{N}F^*$, wobei $F^* = \left(\overline{w}^{kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}$ und $\overline{w} = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ (konjugiert komplex). Damit $\underline{c} = \frac{1}{N}F^*\underline{y}$. D.h. $\boxed{c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot j}}$ (diskrete Fourier Transformation DFT)

- Fast Fourier Transformation FFT
  Wenn $N = 2^m$, lässt sich die Rechenzeit stark verkürzen.

- Diskrete Cosinus Transformation DCT
  $y = f(x),\ x \in [0, T],\ N$ gleiche Intervalle (meist $N = 2^m$). Die Abtastpunkte sind hier die MITTEN DER INTERVALLE.



$$x_j = \frac{h}{2} + j \cdot h = T \cdot \frac{2j+1}{2N} \quad (j = 0, \ldots, N-1)$$

Ansatz: $y = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\omega}{k}x)$ (stetiger Fall)

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{k\pi(2j+1)}{2N}\right) \text{ (diskreter Fall)}$$

Matrixform: $\underline{y} = \underline{Ca}$
Die Spalte von $\underline{C}$ bilden orthogonale Basis von $\mathbb{R}^N$ (entsprechende Normierung führt zu

ORTHONORMALER BASIS). Daher können wir wie bei der Fourier-Transformation vorgehen:
$\underline{a} = \underline{C}^{-1} y \ldots$ DCT
$\underline{y} = C\underline{a} \ldots$ IDCT
Anwendung: Audio und Videokompression (MP3, JPEG). Die Komprimierung erfolgt dabei im Frequenzbereich. kleine Amplituden $a_k \to 0 \rightsquigarrow$ Datenreduktion

5 DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER REELLER VERÄNDERLICHEN

5.1 FUNKTIONEN MEHRERER REELLER VERÄNDERLICHER

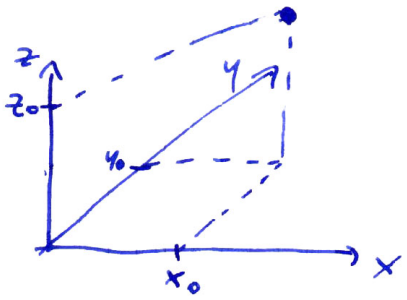
Betrachte Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ wobei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Wir schreiben dann $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wobei $x_1, \ldots, x_n$ unabhängige Variablen und z die abhängige Variable heißen.

Geometrische Veranschaulichung für $n = 2$ Meist schreibt man hier x, y statt x_1, x_2.
$z = f(x, y) \quad (x, y) \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \{(x, y, z) | (x, y) \in Db(f) \wedge z = f(x, y)\}$ ist i.A. eine Fläche in $\mathbb{R}^3$

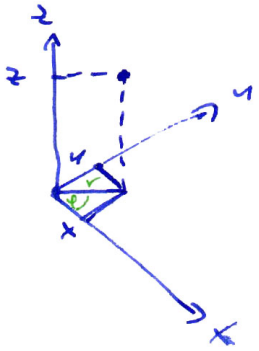
5.1.1 FLÄCHEN IN $\mathbb{R}^3$

(1) Darstellung eines Punktes (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$

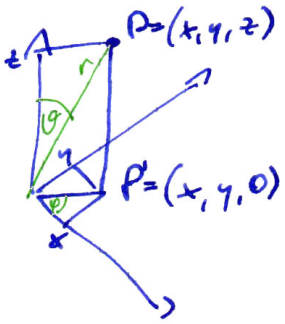
- $x, y, z \ldots$ karthesische Koordinaten



- $r, \varphi, z \ldots$ Zylinderkoordinaten
  $x = r \cdot \cos\varphi$ (ebene Polarkoordinate)
  $y = r \cdot \cos\varphi$ (ebene Polarkoordinate)
  $z = z$
  Umrechnung: $x^2 + y^2 = r^2, \ldots$



- r, φ, ϑ ... Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)
  $x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$
  $x = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$
  $z = r\cos(\vartheta)$



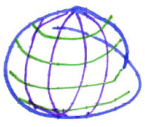
  Beachte: r hat hier andere Bedeutung als bei Zylinderkoordinaten.

(2) Flächendarstellung:

- Explizite karthesische Koordinaten
  $z = f(x,y) \quad x,y \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$
- Implizite karthesische Darstellung
  $F(x,y,z) = 0$
- Parameter-Darstellung
  $x = x(u,v)$
  $y = y(u,v)$
  $z = z(u,v), \quad u,v \in B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw.
  $$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)a \end{pmatrix} \quad \text{mit } (u,v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$$
  Koordinatenlinien:
  $v = v_0$ fest $\Rightarrow \underline{r} = r(u, v_0)$ ... Kurvenschar mit Parameter u auf der Fläche.
  $u = u_0$ fest $\Rightarrow \underline{r} = r(u_0, v)$ ... Kurvenschar mit Parameter v auf der Fläche.

Bsp. 1: (Kugel, Mittelpunkt O, Radius R)
$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = R\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = R\cos\vartheta \qquad \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$
φ geographische Länge
ϑ geographische Breite

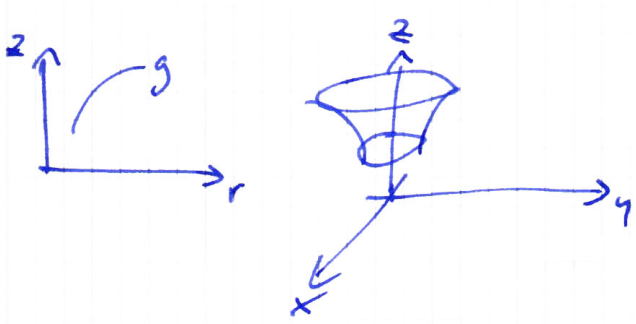
Koordinatenlinien:
ϑ =const. ... Breitenlinien
φ =const. ... Meridian



Parameterfreie Darstellung:
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (implizite Darstellung)

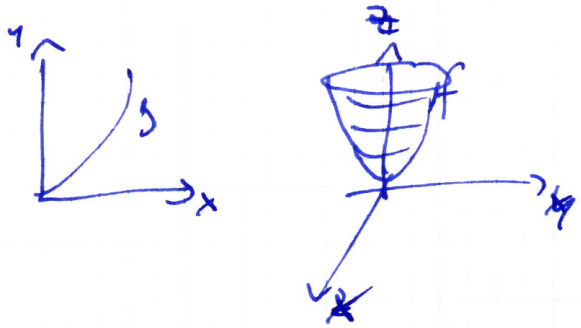
$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (explizite Darstellung. $+$ für obere, $-$ für untere Halbkugel)
Explizite Darstellung in Zylinderkoordinaten:
$z = f(r, \varphi),\ (r, \varphi) \in B \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$
r und φ sind ebene Polarkoordinaten

Spezialfall A $z = f(r, \varphi) \underset{\text{hängt nicht von } \varphi \text{ ab}}{=} g(r),\ r \in I \subseteq [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi]$
$\Rightarrow$ Rotationsfläche um Rotationsachse: z-Achse



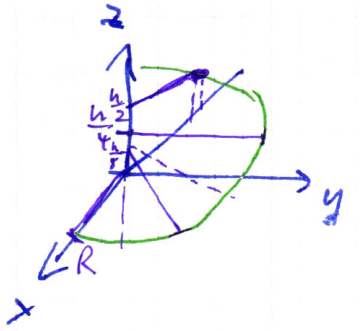
In karthesischen Koordinaten:
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$z = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) =: h(x^2 + y^2)$

Bsp. 2: $z = x^2 + y^2 \quad (= h(x^2 + y^2))$
$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow z = f(x, y) = r^2 =: g(r)$



Spezialfall B $z = f(r, \varphi) \underset{\text{hängt nicht von } r \text{ ab}}{=} g(\varphi) \quad ,\ r \in I_1 \in [0, \infty),\ \varphi \in I - 2 \subseteq \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Wendelfläche um z-Achse

Bsp. 3: $z = f(r, \varphi) = \dfrac{h}{2\pi}\varphi =: g(\varphi) \quad \varphi \in [0, \pi],\ r \in [0, R]$
in Parameterdarstellung:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi \quad \varphi \in [0, \pi],\ r \in [0, R]$



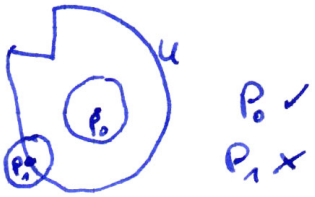
Koordinatenlinien
$r = \text{const.} \ldots$ Schraubenlinien $\quad (\varphi \in [0, \pi])$
$\varphi = \text{const.} \ldots$ Strecken der Länge R, parallel zur $x - y$ Ebene $\quad (r \in [0, R])$

5.1.2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT

Einige Begriffe
Wir betrachten hier nur den Fall $n = 2$. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gelten die Definitionen analog.

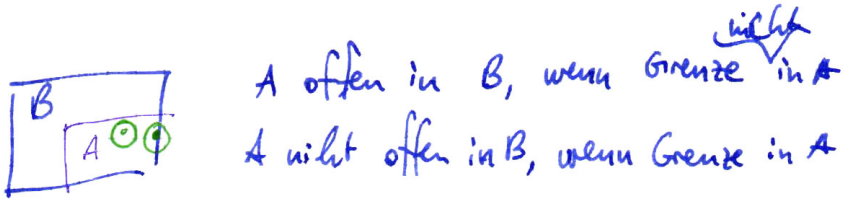
- ε-UMGEBUNG VON $P_0 = (x_0, y_0)$ (bzw. offene ε-Kugel um P_0):
  $U_\varepsilon(x_0, y_0) = \left\{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\right\}$ wobei $\varepsilon > 0$

- UMGEBUNG:
  Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Umgebung von $P_0 = (x_0, y_0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq U$



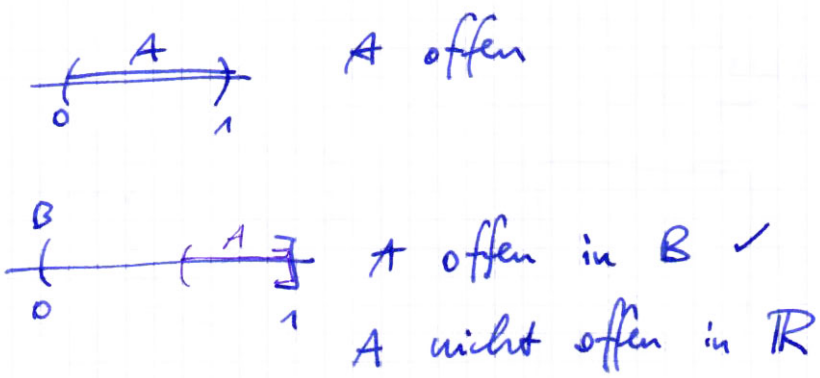
  U ist Umgebung von P_0 aber keine Umgebung von P_1 (es lässt sich von P_1 kein Radius finden, der komplett innerhalb von U liegt).

- OFFEN IN (BEZÜGLICH) EINER MENGE:
  Sei $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Menge A heißt offen in (bezüglich) B, falls für alle $(x, y) \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B \cap U_\varepsilon(x, y) \subseteq A$.



- OFFEN:
  Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt offen, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:
  (1) U ist offen bezüglich $\mathbb{R}^2$
  (2) U ist Umgebung jedes seiner Punkte
  (3) Für jeden Punkt $(x, y) \in U$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x, y) \subseteq U$

Veranschaulichung:



- ABGESCHLOSSEN:
  Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist. D.h. $A^C = \mathbb{R}^2 \setminus A$ ist offen.

  $(0, 1]$ ist weder offen noch abgeschlossen.
  $[0, 1] \times [0, 1]$ ist abgeschlossen.

- INNERER PUNKT
  Der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt innerer Punkt von $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls:
  (1) $(x, y) \in A$
  (2) A ist Umgebung von (x, y)

- HÄUFUNGSPUNKT:
  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt Häufungspunkt der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls jede Umgebung von (x, y) mindestens einen Punkt aus A enthält.
  Bspw. ist 0 ein ist HP der Menge $(0, 1)$.

- ZUSAMMENHÄNGEND:
  Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt zusammenhängend, falls es keine Zerlegung $A = B \cup C$ gibt mit
  - B und C sind disjunkt
  - B und C sind offen in A
  - $B \neq \varnothing$ und $C \neq \varnothing$

- RANDPUNKTE:
  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt Randpunkt der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls jede Umgebung von (x, y) sowohl Punkte aus A, als auch Punkte aus $A^{\mathrm{C}} = \mathbb{R}^2 \setminus A$ enthält (A^c: Komplement).

- MENGE ALLER RANDPUNKTE:
  Die Menge aller Randpunkte von $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit ∂A („Rand von A“).

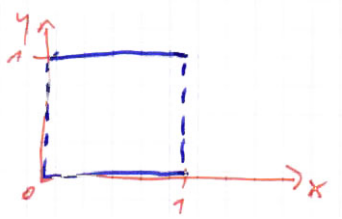
- ABSCHLUSS VON A:
  $\overline{A} = A \cup \partial A$. Es gilt $\overline{A} = \{(x, y) \mid (x, y)$ ist Häufungspunkt von $A\}$

- DAS INNERE VON A:
  $A^\circ := A \setminus \partial A$

- GEBIET:
  Eine zusammenhängende offene Menge heißt Gebiet.

Bsp. 1: $A = (0,1)$, dann:
$\partial A = \{0,1\}$
$A^\circ = (0,1)$
$\overline{A} = [0,1]$

Bsp. 2: $A = (0,1) \times [0,1] = \{(x,y) \mid x \in (0,1),\ y \in [0,1]\}$



- A weder offen noch abgeschlossen.
- $\partial A = ([0,1] \times [0,1]) \setminus ((0,1) \times (0,1))$ (alle 4 Linien der Zeichnung)
- $\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$
- $A^\circ = (0,1) \times (0,1)$

Def. 1: Gegeben sei $z = f(x,y),\ (x,y) \in Db(f)$ und es sei $(x_0|y_0) \in \mathbb{R}^2$ und es existiert eine Umgebung $U(x_0,y_0)$ mit $U(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\} \subseteq Db(f)$
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n,y_n) mit $(x_n,y_n) \in Db(f)$, $(x_n,y_n) \neq (x_0,y_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = a$.

Bemerkung: Für JEDE Annäherung an (x_0,y_0) muss die vorhergehende Formel gelten. Es genügt nicht eine geradlinige Näherung zu betrachten.

Def. 2: Es gelte $U(x_0,y_0) \subseteq Db(f)$. Dann heißt f stetig an der Stelle (x_0,y_0), falls $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ (vgl. Def. 3 aus Kapitel 2.2).

5.2 PARTIELLE ABLEITUNGEN

Def. 1: Die Funktion $z = f(x,y),\ (x_0,y_0) \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle (x_0,y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\boxed{f_x(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$ existiert.

Analog: f an der Stelle (x_0,y_0) partiell nach y differenzierbar, falls

$$\boxed{f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}}$$ existiert.

Diskussion:

(1) Es sei $g(x) := f(x,y_0)$ d.h. y_i ist fest gewählt. Dann ist $g'(x_0) = f_x(x_0,y_0)$ (g': gewöhnliche Ableitung einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$). $\Rightarrow$ Ableitungsregeln aus Abschnitt 3.2 sind sinngemäß zu übertragen

(2) f heißt in dem Gebiet G partiell differenzierbar, wenn f für alle $(x_0,y_0) \in G$ partiell differenzierbar ist.

(3) f heißt im Gebiet G stetig partiell differenzierbar, falls f auf G partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

(4) Analog: Funktionen von mehr als 2 Veränderlichen $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: hält man die Variablen $x_2, \ldots, x_n$ fest, und differenziert nach x_1, so ergibt sich f_{x_1}. Analoges Vorgehen für $f_{x_2}, f_{x_3}, \ldots$

(5) Bezeichnungen:
$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f = z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$
$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \ldots$

(6) Höhere Ableitungen:
$f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
$f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ usw.
Frage: $f_{xy} = f_{yx}$?

Satz 1: Die Funktionen f, f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} seien in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ einer Stelle $(x_0, y_0) \in Db(f)$ erklärt. Außerdem sei f_{xy} an der Stelle (x_0, y_0) stetig. Dann gilt:

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}$$

Bemerkung: Satz 1 heißt Satz von Schwarz.

Bsp. : $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^3} + y^2 - x \quad y \neq 0$

- $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_x = \dfrac{2x}{y^3} - 1$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_{xx} = \dfrac{2}{y^3}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_{xy} = \dfrac{-6x}{y^4}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_y = -\dfrac{3x^2}{y^4} + 2y$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_{yy} = -\dfrac{6x}{y^4}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_{yx} = \dfrac{-6x}{y^4}$

Man sieht: $f_{xy} = f_{yx}$.

Satz 2: (Verallgemeinerte Kettenregel)
Die Funktionen $z = f(u, v),\ u = g(x, y),\ v = h(x, y)$ seien stetig partiell differenzierbar (nach allen Variablen). Dann ist die Funktion $z = f^*(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ partiell nach x und y differenzierbar. Und es gilt:
$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$
$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$

Bsp.: $z = (x^2 + 3y^2)^{x+2y}$ ist nach x und y zu differenzieren.

$u = x^2 + 3y^2,\ v = x + 2y \ \Rightarrow\ z = f(u, v) = u^v$

$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = v \cdot u^{v-1} \cdot 2x + u^v \cdot \ln(u) \cdot 1 = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot 2x + \ln u\right)$

$\Rightarrow z_x = (x^2 + 3y^2)^{x+2y} \left(\frac{x + 2y}{x^2 + 3y^2 e} \cdot 2x + \ln\left(x^2 + 3y^3\right)\right)$

$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = v \cdot u^{v-1} \cdot 6y + u^v \ln(u) \cdot 2 = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot 6y + 2 \ln u\right)$

$\Rightarrow z_y = (x^2 + 3y^2)^{x+2y} \left(\frac{x + 2y}{x^2 + 3y^2} \cdot 6y + 2 \ln\left(x^2 + 3y^2\right)\right)$

Bemerkung: Verallgemeinerung auf mehr als 2 Variablen:

$z = f(u_1, \ldots, u_m),\ u_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad , \ k = 1, \ldots, n$

Satz 3: (Satz über implizite Funktionen)
Sei $F(x, y)$ in eine einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig partiell nach x und y differenzierbar und sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U(x_0)$, so dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ eindeutig eine Funktion $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ erklärt, mit $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in U(x_0)$. Außerdem gilt dann:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}} \quad \forall x \in U(x_0)$$

Beweis der Ableitungsregel

$F(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{y}_{v}) = F(x, f(x)) = 0$ differenzieren wir nach x:

$F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(x) = 0$ durch Umformen erhält man dann:

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$

Diskussion: Mittels Satz 3 ist eine Kurvendiskussion für implizit gegebene Kurven $F(x, y) = 0$ möglich, ohne die Gleichung explizit aufzulösen. Für die 2. Ableitung ergibt sich:

$$f''(x) = -\frac{(F_{xx} \cdot 1 + F_{xy} \cdot y') \cdot F_y - F_x(F_{yx} \cdot 1 + F_{yy} \cdot y')}{F_y^2}$$

$$\overset{y' = -\frac{F_x}{F_y}}{\Longrightarrow} \boxed{f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}}$$

Def. 2: Gegeben sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Die vektorwertige Funktion (Vektorfeld) $\nabla f : Db(f) \to \mathbb{R}^2\ \nabla f(x, y) := \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$ heißt GRADIENT von f.

Ist $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist $\nabla f : Db(f) \to \mathbb{R}^n\ \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

der Gradient.

Bemerkung: Häufig schreibt man auch $\mathrm{grad} f$ statt ∇f.

Diskussion:

(1) Eigenschaften des Gradienten und Anwendungen besprechen wir in Kapitel 5.4.1.

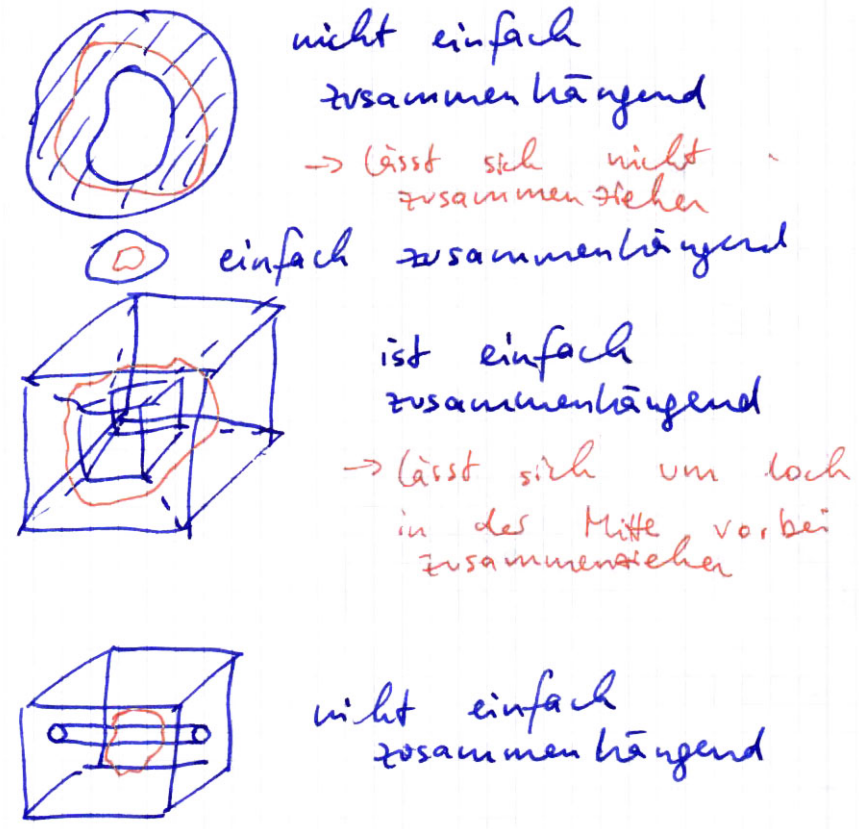
(2) Umkehrung:

Gegeben: Vektorfeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

Gesucht: Funktion F mit $\underline{v} = \nabla F$ (d.h. die Ableitung ist vorgegeben, gesucht ist F)
F heißt dann Stammfunktion oder Potential von $\underline{v}$. Es existiert genau dann eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x = P(x,y)$ und $F_y = Q(x,y)$, wenn

- F in einem EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDEN GEBIET $G \subseteq \mathbb{R}^2$ liegt und
- die sogenannten INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN erfüllt: $P_y = Q_x$.

Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, genau dann wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve eindeutig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.



5.3 TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT UND FEHLERRECHNUNG

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle $(x_0, y_0) \in Db(f)$ total differenzierbar, falls es Konstanten α und β gibt, so dass die lineare Abbildung $(h,k) \mapsto L(h,k) = \alpha h + \beta k$ die Abbildung $(h,k) \mapsto f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ approximiert. D.h. wenn für $R(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)$ der Grenzwert $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ gilt.

Satz 1:

(a) f sei in Umgebung von (x_0, y_0) stetig partiell nach x und y differenzierbar. Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) auch total differenzierbar.

(b) f sei bei (x_0, y_0) total differenzierbar. Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) partiell differenzierbar und es gilt $\alpha = f_x(x_0, y_0),\ \beta = f_y(x_0, y_0)$.

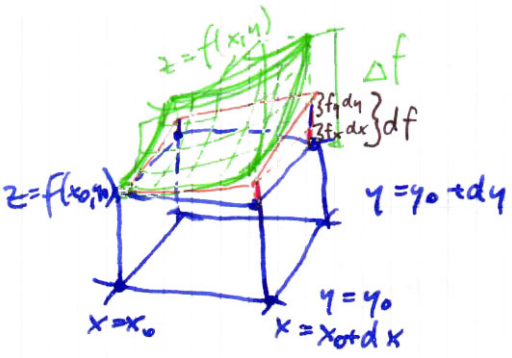
Def. 2: $\mathrm{d}f(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$ heißt das zur Stelle (x_0, y_0) und den Zuwächsen $h = \Delta x = \mathrm{d}x$ und $k = \Delta y = \mathrm{d}y$ gehörende TOTALE DIFFERENTIAL von f. Die Summanden heißen partielle Differentiale.
Schreibweise: $\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y$

Diskussion:

(1) Es gilt $\Delta f := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f + R(h, k)$.
$\Rightarrow \Delta f \approx \mathrm{d}y$ (falls $|h|,\ |k|$ klein)
$\Rightarrow$ Anwendung in der Fehlerrechnung: Absoluter Fehler
$|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| \leq |f_x(x_0, y_0)| \cdot |\Delta h| + |f_y(x_0, y_0)| \cdot |\Delta y|$
Mit den Fehlerschranken $S_f := \max|\Delta f|$, $S_x := \max|\Delta x|$, $S_y := \max|\Delta y|$ gilt daher $S_f \approx |f_x(x_0, y_0)| \cdot S_x + |f_y(x_0, y_0)| \cdot S_y$ (lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz)

(2) Geometrische Veranschaulichung

- Δf ist Zuwachs der Funktion wenn (x, y) von (x_0, y_0) in $(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$ übergeht
- $\mathrm{d}f$ ist der entsprechende Zuwachs der Tangentialebene (TE) an die Fläche $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0, z_0).

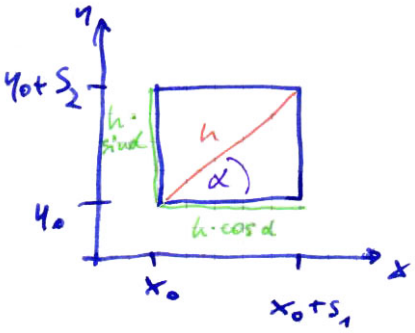


(3) Anwendung für die Fehlerrechnung: Übung

5.4 WEITERE BEGRIFFE, ANWENDUNGEN

5.4.1 RICHTUNGSABLEITUNG, TANGENTIALEBENEN

Def. 1: $f(x, y)$ besitze in (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung. Für jeden Vektor $\underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = |\underline{s}| \cdot \left(\cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ heißt
$\dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h\cos(\alpha), y + h\sin(\alpha)) - f(x_0, y_0)}{h}$ Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung $\underline{s}$ (bzw. in Richtung α).



Diskussion:

(1) $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ ist der Flächenanstieg in Richtung $\underline{s}$.

(2) Speziell:

$\underline{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = f_x$

$\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha = 90° \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = f_y$

Satz 1: (Berechnung der Richtungsableitung)
Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{f_x(x_0, y_0) \cdot s_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \\ &= (\nabla f(x_0, y_0), \underline{s}^\circ) \qquad \text{(das Skalarprodukt)} \end{aligned}$$

wobei $\underline{s}^\circ = \frac{s}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$ die auf Länge 1 normierte Version von s ist.

Satz 2: (Eigenschaften des Gradienten im Fall $z = f(x, y)$)
Der Vektor $\nabla f(x_0, y_0)$

(a) steht senkrecht auf (der Projektion in die x-y-Ebene) der Höhenlinie $f(x, y) = c$ zum Niveau $z = c = f(x_0, y_0)$.

(b) zeigt in die Richtung des stärksten Funktionszuwachses. Dieser ergibt sich mittels $\max_{\underline{s}} \frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|$

Anschaulich: $z = f(x, y)$

Diskussion: Anwendung Tangentialebenengleichungen (TE)

- TE an die Fläche $F(x, y, z) = 0$ im Punkt (x_0, y_0, z_0):
  $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(\dots)(y - y_0) + F_z(\dots)(z - z_0) = 0$
  Denn: Fläche $F(x, y, z) = 0$ ist eine Niveaufläche von $u = F(x, y, z)$ zum Niveau 0.
  $\Rightarrow n := \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ist ein Normalenvektor dieser Fläche

$\Rightarrow$ Tangentialebene ist gegeben durch $(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r_0}) = 0$ (Skalarprodukt).

D.h. $\left(\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ F_y(\dots) \\ F_z(\dots) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$

- Speziell: $z = f(x, y) \Rightarrow$ TE in (x_0, y_0, z_0).
  $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
  Denn: $z = f(x, y) \Leftrightarrow 0 = f(x, y) - z =: F(x, y, z)$
  $\Rightarrow F_x = f_x,\ F_y = f_y,\ F_z = -1$

Bsp. 1: $z = f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}(x^2 + y^2),\ P_0 = (3, -3) \Rightarrow z_0 = 2$

(a) Gradient : $\nabla f = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}x \\ -\frac{2}{9}y \end{pmatrix}$

$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

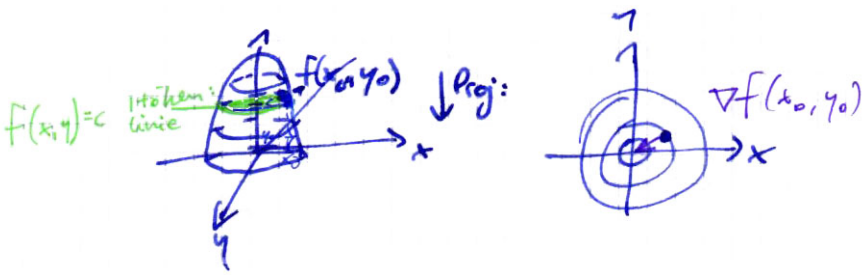
(b) max. Funktionsanstieg in (x_0, y_0):
$|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,9428$

(c) Tantentialebene in (x_0, y_0, z_0):
$z = 2 + (-\frac{2}{3})(x - 3) + \frac{2}{3}(y + 3)$
$\Leftrightarrow 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} - \frac{y}{9} + \frac{z}{6} = 1$

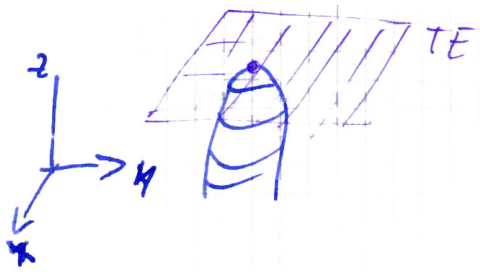
5.4.2 LOKALE EXTREMA (OHNE NEBENBEDINGUNGEN) VON FUNKTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHER

Def. 2: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt in (x_0, y_0) lokal $\begin{cases} \text{minimal} \\ \text{maximal} \end{cases}$, wenn es eine Umgebung $U(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in U(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$ gilt $\begin{cases} f(x, y) > f(x_0, y_0) \\ f(x, y) < f(x_0, y_0) \end{cases}$

Diskussion: Anschaulich:



TE liegt parallel zur x-y-Ebene.



Bezeichnungen:

- (x_0, y_0) ... Extremstelle
- $z_0 = f(x_0, y_0)$ ... Extremwert
- (x_0, y_0, z_0) ... Extrempunkt

Offensichtlich ist der Funktionsanstieg (Richtungsableitung) für alle Richtungen $= 0$. Daher auch $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$.

Satz 3: (Notwendige Bedingungen für lokale Extrema)
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle (x_0, y_0) lokal und partiell differenzierbar. Dann gilt :
$f_x(x_0, y_0) = 0$
$f_y(x_0, y_0) = 0$

Satz 4: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

(1) $f(x, y)$ besitze in $U(x_0, y_0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

(2) Die notwendige Bedingung $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ sei erfüllt.

Dann gilt mit $D(x, y) := f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

$\boxed{D(x_0, y_0) > 0} \Rightarrow f$ in (x_0, y_0) lokal extremal und insbesondere

- lokal minimal, falls zusätzlich $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
- lokal maximal, falls zusätzlich $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Beachte: $D(x, y)$ wird Diskriminante genannt.

Diskussion:

(1) $D(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ haben beide das gleiche Vorzeichen.
Daher kann die Bedingung an f_{xx} durch die gleiche Bedingung an f_{yy} ersetzt werden.

(2) Allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung von lokalen Extrema von $f(x, y) = z$:

(a) Gleichungssystem $f_x = 0$, $f_y = 0$ lösen.
$\rightsquigarrow$ liefert extremwertverdächtige Stellen $P_E = (x_E, y_E)$

(b) Für diese Stellen $P_E = (x_E, y_E)$ Diskriminante berechnen.

1. Fall: $D(x_E, y_E) > 0 \Rightarrow$ Extremum $f_{xx} \begin{cases} > 0 & \dots \text{ Minimum} \\ < 0 & \dots \text{ Maximum} \end{cases}$
2. Fall: $D(x_E, y_E) = 0 \Rightarrow$ gesonderte Untersuchung notwendig
3. Fall: $D(x_E, y_E) < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt (im engeren Sinn).

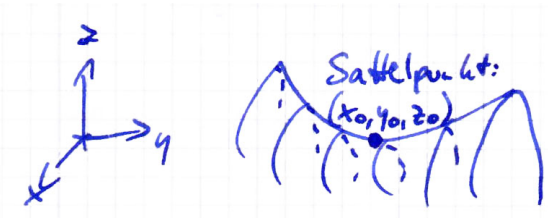
Allgemein: Stationäre Stellen, die keine Extrema sind werden als Sattelstellen bezeichnet.

Bsp. 2: $z = f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 - y^2 + 4$

(a) $f_x(x,y) = 2y^2 - 4x \overset{!}{=} 0$
$f_y(x,y) = 4xy - 2y \overset{!}{=} 0$
aus f_y: $\Rightarrow 0 = \underset{y=0}{2y}\,\underset{x=\frac{1}{2}}{(2x-1)}$
aus f_x: $\Rightarrow x = 0, y = \pm 1$
$\Rightarrow$ Extremwertverdächtige Stellen: $P_1(0,0),\ P_2 = (\frac{1}{2},1),\ P_3 = (\frac{1}{2},-1)$

(b) $f_{xx} = -4,\ f_{yy} = 4x - 2,\ f_{xy} = 4y$
$\Rightarrow D(x,y) = -4(4x - 2 - (4y)^2$
Nun die Punkte einsetzen:
$P_1 : D(0,0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Extremum $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximum
$P_2 : D(\frac{1}{2},-1) = -16 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
$P_3 : D(\frac{1}{2},-1) = -16 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

(3) Sattelstellen anschaulich:



(4) Im Falle $D(x_E, y_E) = 0$ ist eine gesonderte Untersuchung notwendig.
Bspw. Einschränkung des Definitionsbereichs auf Kurven , die durch (x_E, y_E) verlaufen.
Genau dann, wenn ALLE diese Einschränkungen ein Maximum bei (x_E, y_E) aufweisen ist (x_E, y_E) eine Maximumstelle von f.

Bsp. 3: $z = f(x,y) = x^4 - y^4$
$f_x = 4x^3 \overset{!}{=} 0$
$f_y = -4y^3 = 0$
$\Rightarrow x = 0,\ y = 0 \rightarrow P_E = (0,0)$
$f_{xx} = 12x^2,\ f_{yy} = -12y^2,\ f_{xy} = 0$
$\Rightarrow D(0,0) = 0$
Einschränkung auf Gerade $x = 0 \Rightarrow z = -y^4 \rightarrow$ hat Maximum (Parabel unten offen)
Einschränknug auf Gerade $y = 0 \Rightarrow z = x^4 \rightarrow$ hat Minimum (Parabel oben offen)
$\Rightarrow$ keine Extremstelle

(5) $z = f(x_1, \ldots, x_n),\ \underline{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^4$

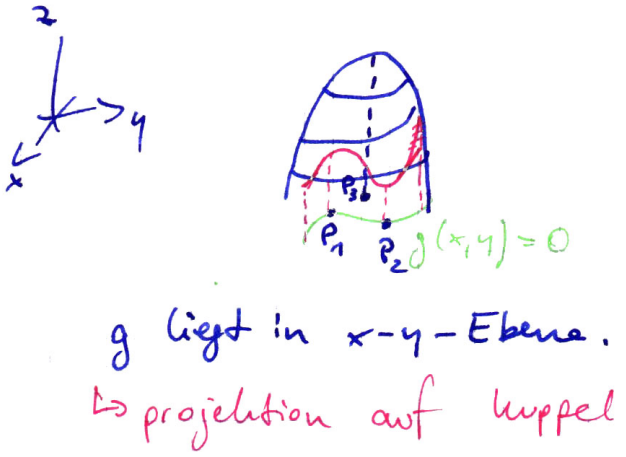
- notwendige Bedingung $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$
  $\rightsquigarrow$ liefert mögliche Extremstelle x_E
- hinreichende Bedingung:
  Definiere die Hesse Matrix: $\underline{H}(\underline{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}\right)_{i,j=1}^{n}$ (alle möglichen Ableitung von 2 Variablen)
  (a) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind positiv $\Rightarrow x_E$ ist lokales Minimum
  (b) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind negativ $\Rightarrow x_E$ ist lokales Maximum
  (c) Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind sowohl positiv als auch negativ $\Rightarrow x_E$ ist Sattelpunkt (keine Extremstelle)

(d) Wenigstens ein $EW = 0$ ($\Leftrightarrow \det \underline{H}(\underline{x_E}) = 0$) $\Rightarrow$ gesonderte Betrachtung notwendig (außer es gilt gleichzeitig c.))
Beachte für $n = 2$:
$\det(\underline{H}(\underline{x_E}) - \lambda \underline{E}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$
$\overset{\lambda=0}{\Rightarrow} \det(\underline{H}(\underline{x_E})) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = D(x_E)$
$\lambda_1 + \lambda_2 = f_{xx}(x_E) + f_{yy}(x_E)$
Damit ist diese Vorgehensweise für hinreichende Bedingung identisch mit der Fallunterscheidung in Diskussion aus 2.).

5.4.3 LOKALE EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

Problem: Gesucht sind lokale Extrema von $z = f(x, y)$ unter der Nebenbedingung (NB) $g(x, y) = 0$.
Anschaulich:

- Fläche $z = f(x, y)$ wird mit Zylinderfläche $g(x, y) = 0$ geschnitten.
  $\rightsquigarrow$ Schnittkurve C
- Gesucht sind Stellen (x_0, y_0) auf der Kurve $g(x, y) = 0$ an denen C extremale Höhe über der x-y-Ebene besitzt.



Diskussion:

(1) $g(x, y) = 0$ ist auffassbar...
  (a) als Kurve in x-y-Ebene $K = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$
  (b) als Zylinderfläche $\perp$ x-y-Ebene (Zylinderfläche wird erzeugt von einer ebenen Kurve K. Entlang dieser wird eine Gerade, die senkrecht auf der x-y-Ebene steht verschoben).

(2) Falls $g_y \neq 0 \Rightarrow g(x, y) = 0$ ist nach y auflösbar, d.h. $y = y(x)$, damit $z = f(x, y(x)) \rightarrow$ Extrema berechnen. Notwendige Bedingung ist als $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_x + f_y y' = 0$. Außerdem gilt $g(x, y(x)) = 0 \Rightarrow g_x + g_y y' = 0$ mit $\underline{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \neq 0$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ gilt $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ und $(\underline{a}, \underline{c}) = 0$.
$\Rightarrow \underline{b} + \lambda \underline{c} = 0$ (mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \boxed{f_x + \lambda g_x = 0 \quad f_y + \lambda g_y = 0}$ (falls $g_x \neq 0$, analoges vorgehen)
Dies ergibt die LAGRANGE-METHODE:

(a) Bilde Lagrange Funktion:
$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
unter Verwendung des Hilfsparameters λ.
Beachte: NB muss in Form $g(x, y) = 0$ gegeben sein.

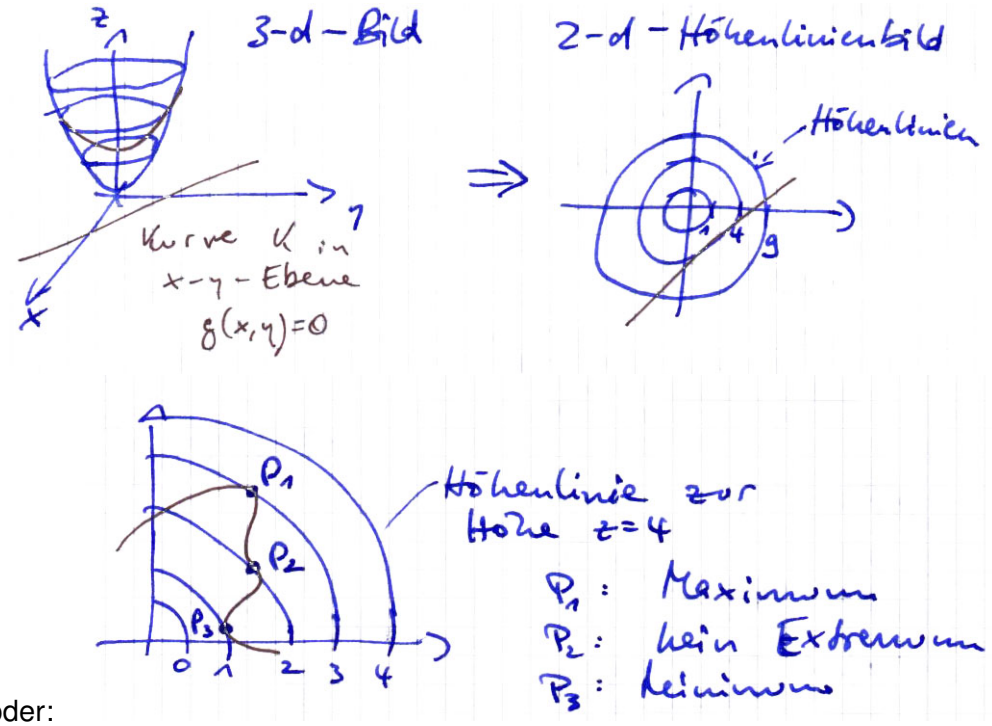
(b) Es sei (x_E, y_E) eine lokale Extremstelle von $z = f(x, y)$ unter der NB $g(x, y) = 0$. Außerdem sollen f und g stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzen (in $U(x_0, y_0)$) und es gelte $\nabla g(x_E, y_E) \neq 0$ (d.h. $g_x(x_E, y_E) \neq 0 \vee g_y(x_E, y_E) \neq 0$, denn dann kann NB nach x oder y aufgelöst werden). DANN gibt es eine Lösung des Gleichungssystems

$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$
$$F_z = 0$$

der Gestalt (x_E, y_E, λ_E). D.h. die Lösungen des Gleichungssystems liefern stationäre Stellen (mögliche Extremstellen).
SONDERFALL: Eventuell vorhandene Stellen (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$ (sogenannte singuläre Punkte der Kurve K $g(x, y) = 0$) können Extremstellen sein, ohne dass sie sich aus dem Gleichungssystem ergeben. Diese müssen daher gesondert betrachtet werden.

(c) Untersuchung der stationären Stellen bspw. mittels

- Höhenlinienbild



oder:

- geometrische Überlegung
- die hinreichende Bedingung:
$D := F_{xx} g_y^2 - 2F_{xy} g_x g_y + F_{yy} g_x^2$ mit $F = f + \lambda g$.
Dann $D(x_E, y_E, \lambda_E)$ $\begin{cases} < 0 & \text{Maximum} \\ > 0 & \text{Minimum} \end{cases}$

Bsp. 4: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ mit NB $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

(a) $F(x,y,\lambda) = \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)}_{g(x,y)}$

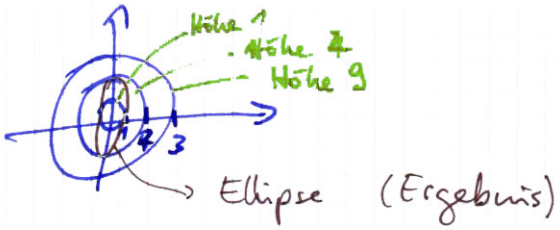
(b)

$$F_x = 2x + 2\lambda x = 0$$
$$F_y = 2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0$$
$$F_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

Aus erster Gleichung: $\underbrace{2x}_{\to x=0}\ \underbrace{(1+\lambda)}_{\to \lambda=-1} = 0$

Fall $x=0$: $\overset{\text{3. Gl.}}{\Rightarrow}\ y = \pm 2,\ \lambda = \dots$

Fall $\lambda = -1$: $\overset{\text{2. Gl.}}{\Rightarrow}\ 2y - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0 \overset{\text{3. Gl.}}{\Rightarrow} x = \pm 1$



Koordinaten für lokale Extrma sind also $P_1 = (0,2),\ P_2 = (0,-2),\ P_3 = (-1,0),\ P_4 = (1,0)$. Im Höhenlinienbild wird klar: P_1 und P_2 sind Maxima (mit Funktionswert 4), P_3 und P_4 sind Minima (mit Funktionswert 1).
Beachte: Alternativ nutzt man das hinreichende Kriterium aus c.) (mit $D(x_E, y_E, \lambda_E)$).
Also: Wenn möglich Bild Zeichen und als hinreichendes Kriterium nutzen oder das Kriterium aus c.) nutzen.

Bemerkung:

(1) Für Funktionen $f(x_1, \dots, , x_n)$ mit $n > 2$ Veränderlichen und $k < n$ Nebenbedingungen $g : (x_1, \dots, x_n) = 0$ analoges Vorgehen:
Lagrange Funktion:
$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n)$
Die Bedingung 1.) wird dann zu
$$rang\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} = k$$

(2) Falls NB eindeutig nach k Veränderlichen auflösbar, dann Rückführung auf Problem OHNE NB mit $n-k$ Veränderlichen möglich.
Vorsicht: in Bsp. 4 lösen wir nach y auf: $y^2 = 4(1-x^2) \ \Rightarrow\ y = \pm\sqrt{4(1-x^2)}$
Einsetzen liefert: $z = x^2 + y^2 = 4 - 3x^2$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -6x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$
Es ergeben sich somit nur P_1 und P_2 und nicht alle Lösungen, da y nicht eindeutig!

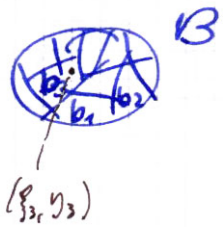
6 INTEGRALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

6.1 INTEGRALE ÜBER EBENE BEREICHE

6.1.1 BEGRIFF

- Geg.:
  (1) Beschränkter, abgeschlossener Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$
  (2) Fläche $z = f(x, y) \geq 0$, f stetig
- Ges.: Volumen V des Körpers K unter der Fläche über dem Bereich B

- Idee: Zerlegung der Fläche b in Teilbereiche $\Delta b \rightsquigarrow$ Zerlegung von K in Säulen mit dem Volumen ΔV: $\Rightarrow V = \sum \Delta V_i \approx \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta b_i$



- f stetig, Verfeinerung, Grenzübergang $\rightsquigarrow$ Grenzwert V existiert unabhängig von Zerlegungssäulen.
- Schreibweise: $\iint\limits_B f(x, y)\, \mathrm{d}b \ldots$ Bereichsintegral

Diskussion

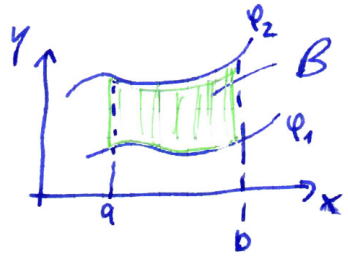
(1) Einteilung von B durch achsenparallele Geraden

$\Rightarrow \mathrm{d}b = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$
$\Rightarrow$ Schreibweise: $\iint\limits_B f(x, y)\, \mathrm{d}b = \iint\limits_B f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(2) Unabhängig von der geometrischen Bedeutung wird das Bereichsintegral auch für Funktionen mit negativen Funktionswerten definiert.

6.1.2 REDUKTION AUF DOPPELINTEGRALE

Gegeben seien zwei stetige Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Der Bereich $B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(xy)\}$ heißt Normalbereich bezüglich der x-Achse.



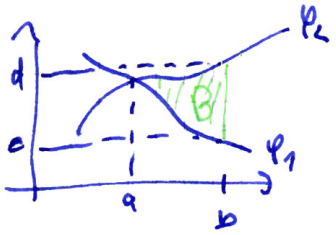
Dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

(Klammern lässt man oft weg)

Diskussion:

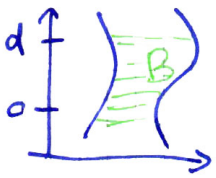
(1) Normalbereich bezüglich der x-Achse wird links und rechts begrenzt durch Koordinatenlinie $x = a,\ x = b$. Diese Begrenzungen können zu Punkten entarten.



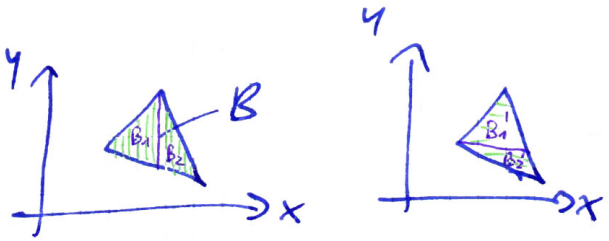
Das Intervall $[a, b]$ ergibt sich durch Orthogonalprojektion von B auf die x-Achse. Daraus ergeben sich die stets konstanten Grenzen a und b für die äußere Integration. Dagegen läuft y in Abhängigkeit von x nur von $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2(x)$ und nicht von c bis d. Grenzen für das innere Integral hängen also im Allgemeinen von der äußeren Integrationsvariablen ab.

(2) Analog: Gegeben $\psi_1(y) \leq \psi_2(y),\ y \in [c, d]$ liefert Normalbereich bezüglich der y-Achse $B = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

Dann $\displaystyle\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

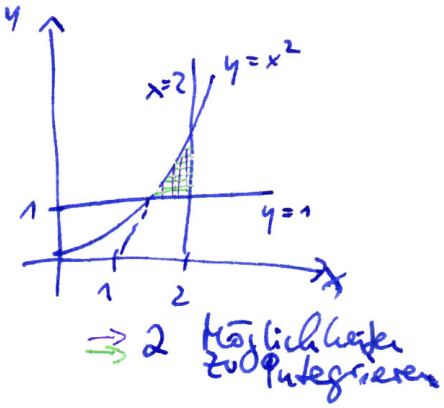


(3) Oft sind beide Varianten möglich. Manchmal ist eine Zerlegung nötig.



(4) Spezialfall: außen und innen konstante Grenzen $\Leftrightarrow$ B ist achsenparalleles Rechteck. Hier ist die Integrationsreihenfolge egal.

Bsp. 1: Zu berechnen ist $I = \iint\limits_B \frac{x}{y}\,\mathrm{d}b$. B werde begrenzt durch $y = x^2$, $x = 2$ und $y = 1$.



Variante 1: $B = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x^2\}$
Variante 2: $B = \{(x, y) \mid 1 \le y \le 4,\ \sqrt{y} \le x \le 2\}$
Berechnen mit Variante 2:

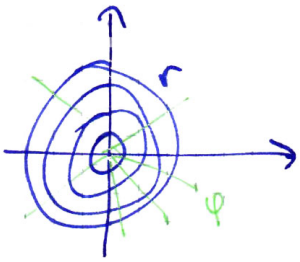
$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^4 \int_y^2 \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{\sqrt{y}}^2 \mathrm{d}y \\
&= \int_1^4 \frac{2^2}{2y} - \frac{y}{2y}\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \frac{2}{y} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[2\ln|y| - \frac{1}{2}y\right]_1^4 = 2\ln(4) - 2 - 2\ln(1) + \frac{1}{2} \\
&= 2\ln 4 - \frac{3}{2} = 1{,}2726
\end{aligned}
$$

6.1.3 ANWENDUNGEN

Volumen V unter $z = f(x, y) \ge 0$ über B	$V = \iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b$
Flächeninhalt $[B]$ von B	$[B] = \iint\limits_B 1\,\mathrm{d}b = \iint\limits_b \mathrm{d}b$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s) von B	$x_s = \frac{1}{[B]} \iint\limits_B x\,\mathrm{d}b,\ y_s = \frac{1}{[B]} \iint\limits_B y\,\mathrm{d}b$
Integralmittelwert m von f auf B	$m = \frac{1}{[B]} \iint f(x, y)\,\mathrm{d}b$

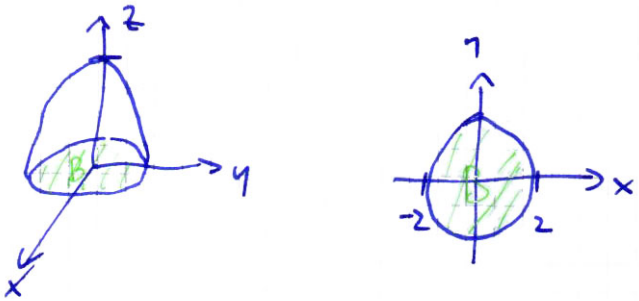
6.1.4 KOORDINATENTRANSFORMATION

- Ziel: Durch neue Koordinaten (z.B. u und v) möglichst einfache Grenzen erzeugen. Günstig ist es, wenn möglichst viele Begrenzungen von B auf Koordinatenlinien liegen ($u = cost$ oder $v = const$).
- Besonders wichtig: Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Koordinatenlinien sind dann $r = const,\ \varphi = const$



Anwendung falls B Kreisbereich, Kreissektor, Kreisring, ... mit Mittelpunkt 0 ist.
Das Bereichselement ist dann ebenfalls durch die neuen Koordinaten auszudrücken:
$\boxed{\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Bsp. 2: Gesucht ist das Volumen V des Körpers begrenzt durch den Rotationsparaboloid $z = 4 - (x^2 + y^2)$ und der x-y-Ebene ($z = 0$).
Schnittkurve $(z = 0)$: $4 = x^2 + y^2$ (Kreis in x-y-Ebene)



B in Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ mit $r \in [0, 2],\ \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V &= \iint_B 4 - (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}b = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2)\,\underbrace{r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}b} \\
&= \int_0^2 \int_2^{2\pi} (4r - r^3)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 (4r - r^2)[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^2 4r - r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi[2r^2 - r^4]_0^2 \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

6.1.4.1 ALLGEMEINE KOORDINATENTRANSFORMATIONEN

geg.: $\boxed{x = x(u, v),\ y = y(u, v)}$

Def.: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ heißt FUNKTIONALDETERMINANTE der gegebenen Transformation.

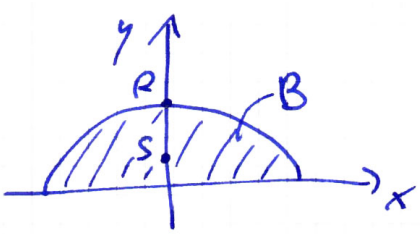
Es ergibt sich für das Bereichsintegral $\mathrm{d}b = \left|\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Falls $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}$ erhält man durch das gegebene eine umkehrbare Abbildung $(x,y) \in B \leftrightarrow (u,v) \in B'$. Für das Bereichsintegral gilt in den neuen Koordinaten $\boxed{I = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \iint\limits_{B'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$

Diskussion:

(1) Funktionaldeterminante bei Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$:
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$
$\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

(2) Bei Kreisbereichen mit Mittelpunkt (x_0, y_0) verwendet man sogenannte allgemeine Polarkoordinaten mit Pol (x_0, y_0): $x = x_0 + r\cos\varphi,\ y = y_0 + r\sin\varphi$
Dann gilt: $\boxed{\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Bsp. 3: Gesucht: Geometrischer Schwerpunkt S der Kreishalbfläche begrenzt von $x^2 + y^2 = R^2$ $(y \geq 0)$.

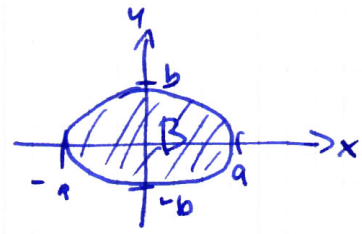


Polarkoordinaten:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r \in [0, R]$
$\varphi \in [0, \pi]$

- Flächeninhalt: $[B] = \iint\limits_B \mathrm{d}b = \int_0^R \int_0^\pi r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^R r\,\mathrm{d}r = \pi\dfrac{R^2}{2}$
- $x_s = 0$ (aus Symmetriegründen)
- $y_s = \iint\limits_B y\,\mathrm{d}b = \int_0^R \int_0^\pi \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^R r^2[-\cos\varphi]_0^\pi\,\mathrm{d}r = 2\dfrac{R^3}{3}$
  $\Rightarrow y_s = \dfrac{\frac{2}{3}R^2}{\frac{\pi}{2}R^2} = \dfrac{4}{3\pi}R = 0{,}424R$

$\Rightarrow (x_s, y_s) = \left(0, \dfrac{4}{3\pi}R\right)$ ist der Schwerpunkt.

Bsp. 4: Gesucht: Flächeninhalt innerhalb einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Parameterdarstellung:
$x = a \cos v$
$y = b \sin v$
$v \in [0, 2\pi]$

- elliptische Polarkoordinaten:
  $x = x(u, v) = a \cdot u \cdot \cos v$
  $y = y(u, v) = b \cdot u \cdot \sin v \Rightarrow B = \{(x, y) \mid x = a\,u \cos v,\ y = b\,u \sin v,\ u \in [0, 1],\ v \in [0, 2\pi]\}$
- Funktionaldeterminante:
  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos v & -a\,u \sin v \\ b \sin v & b\,u \cos v \end{vmatrix} = a\,b\,u$
  $\Rightarrow \mathrm{d}b = a\,b\,u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
  $\Rightarrow [B] = \iint\limits_B \mathrm{d}b = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a\,b\,u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \pi\,a\,b$

6.2 OBERFLÄCHENINTEGRALE

6.2.1 FLÄCHEN IM RAUM

Erinnerung:

- $x, y, z \ldots$ karthesische Koordinaten
- $r, \varphi, z \ldots$ Zylinderkoordinaten (r: Abstand von z-Achse, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$)
- $r, \varphi, \vartheta \ldots$ (r: Abstand vom Koordinatenursprung, $x = r \sin \vartheta \cos \varphi,\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi,\ z = r \cos \vartheta$)

Flächendarstellungen:

- $z = f(x, y) \ldots$ explizite karthesische Darstellung
- $F(x, y, z) = 0 \ldots$ implizite karthesische Darstellung
- $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v) \ldots$ Parameterdarstellung
- $z = f(r, \varphi) \ldots$ explizite Darstellung in Zylinderkoordinaten
  speziell:
  - $z = f(r, \varphi) = g(r),\ r \in I \subset [0, \infty],\ \varphi \in [0, 2\pi]$
    Rotationsfläche um z-Achse
  - $z = f(r, \varphi) = g(\varphi),\ r \in I_1 \subseteq [0, \infty],\ \varphi \in I_2 \subseteq \mathbb{R}$
    Wendelflächen

6.2.2 OBERFLÄCHENELEMENT, BERECHNUNG UND ANWENDUNG

- geg.: Fläche $\underline{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in B$.
  Analog zu ebenen Bereichsintegralen ergibt sich $\mathrm{d}F = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ (skalares Oberflächenelement)

- Oberflächenintegral (über Skalarfeld):
  $\iint\limits_F f(x,y,z)\,\mathrm{d}F = \iint\limits_B f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \cdot |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

- Anwendung(analog zu Bereichsintegralen)

Flächeninhalt $[F]$ von F	$[F] = \iint\limits_F \mathrm{d}F$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s)	$x_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F x\,\mathrm{d}F$ $y_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F y\,\mathrm{d}F$ $z_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F z\,\mathrm{d}F$
Integralmittelwert m von f auf F	$m = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F f(x,y,z)\,\mathrm{d}F$

6.2.2.1 BERECHNUNG VON DF FÜR SPEZIELLE FLÄCHENELEMENTE

- $z = f(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{y}_{v}) \Rightarrow$ Parameterdarstellung:

  $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$

  $\underline{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}$

  $\underline{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$

  $|r_u \times r_v| = \left| \begin{vmatrix} \underline{i} & 1 & 0 \\ \underline{j} & 0 & 1 \\ \underline{k} & f_u & f_v \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

  wobei $\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $z = f(\underbrace{u}_{u}, \underbrace{\varphi}_{v}) \Rightarrow$ Parameterdarstellung:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ f_u \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = \left| \begin{vmatrix} \underline{i} & \cos v & -u\sin v \\ \underline{j} & \sin v & u\cos v \\ \underline{k} & f_u & f_v \end{vmatrix} \right| = \sqrt{u^2(1+f_u^2)+f_v^2} = \sqrt{r^2(1+f_r^2)+f_\varphi^2}$$

- Kugel mit MP 0 und Radius R
  Kugelkoordinaten: $r = R = const$
  Parameterdarstellung:
  $x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
  $y = R\sin\vartheta\sin\varphi$
  $z = R\cos\vartheta$
  $\varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} x = R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

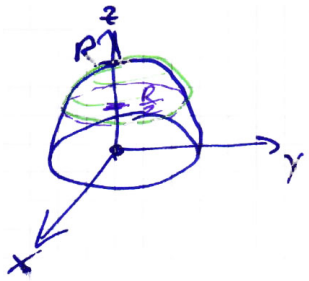
$$\underline{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

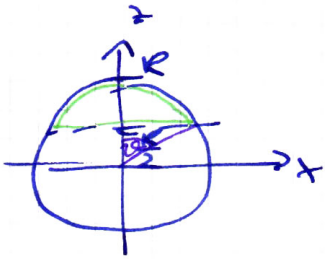
$$\Rightarrow |r_\vartheta \times r\varphi| = \cdots = \sqrt{R^4\sin^4\vartheta + R^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta} = R^2\sin\vartheta$$

Zusammenfassung:

Fläche	$\mathrm{d}F$
$z = f(x,y)$ ... expl. karth. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$z = f(r,\varphi)$ ... expl. zyl. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{r^2(1+f_r^2)+f_\varphi^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Speziell für Rotationsflächen $z = f(r,\varphi) = g(r),\ \varphi \in [0,2\pi]$	$\mathrm{d}F = r\sqrt{1+(g'(r))^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Kugel MP 0, Radius R	$\mathrm{d}F = R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$

Bsp. 1: Man berechne den Schwerpunkt der Kugelteilfläche $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq \frac{R}{2}$ (Kugelkappe)





$\cos\vartheta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow$ Parameterdarstellung:
$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
$x = R\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = R\cos\vartheta$
$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}$

- Inhalt von F: $[F] = \iint\limits_F \mathrm{d}F = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta$
  $= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi R^2 [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi R^2$
- Aus Symmetriegründen gilt $x_s = y_s = 0$
- $z_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F z \,\mathrm{d}F = \frac{1}{[F]} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \underbrace{R\cos\vartheta}_{z} \underbrace{R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta}_{\mathrm{d}F}$
  $= \frac{1}{\pi R^2} 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$
  $= 2R \left[\frac{\sin^2\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}R$

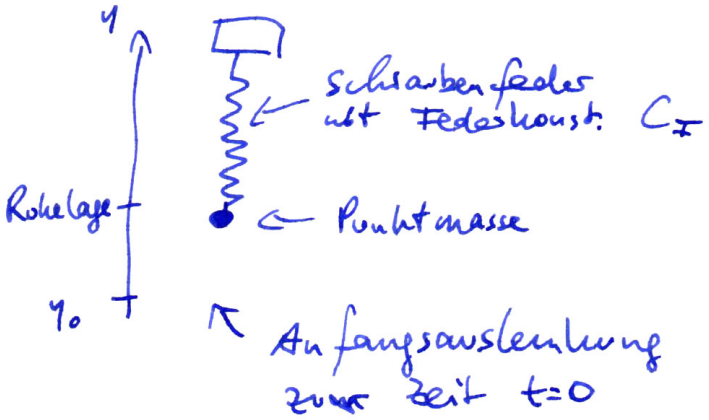
$\Rightarrow (x_s, y_s, z_s) = \left(0, 0, \frac{3}{4}R\right)$ ist der Schwerpunkt.

7 GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

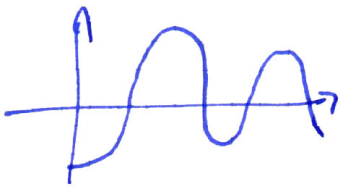
7.1 GRUNDBEGRIFFE

Vorbetrachtung:

Bsp. 1:



Lassen wir die Feder los, so kommt es zur Schwingung;



Gesucht ist Zeitverlauf $y = y(t)$ der Bewegung der Punktmasse. Dazu nutzen wir das Grundgesetz der Mechanik:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$
$$K = m \cdot \ddot{y}$$

bspw. freie (d.h. ohne äußere Kraft) und ungedämpfte (d.h. ohne Reibung) Schwingung:
$K = -C_F \cdot y$ (Hookesches Gesetz)
$\Rightarrow m \cdot \ddot{y} = -C_f \cdot y$ ($\leftarrow$ Differentialgleichung)
mit $y(0) = y_0$ (Startpunkt y_0) und $\dot{y}(0) = 0$ (Startgeschwindigkeit 0) ($\leftarrow$ Anfangsbedingungen).
Begriffe:
Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Funktion, die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält.
2 Grundarten:

(1) Gesuchte Funktion $y = y(x)$, d.h. EINE unabhängige Veränderliche $\Rightarrow$ GEWÖHNLICHE DGL

(2) Gesuchte Funktion $u = u(x, y)$ bzw. $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d.h. mindestens 2 unabhängige Veränderliche $\Rightarrow$ Ableitungen sind partielle Ableitungen $\Rightarrow$ PARTIELLE DGL

Bsp. 2: $y' = x^2$, gewöhnliche DGL für die Funktion $y = y(x)$.
Lösung: $y = \int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$ d.h. die Lösung ist eine Kurvenschar mit einem freien Parameter C.

Bsp. 3: $u_x = x \cdot y \ldots$ partielle DGL
Lösung: $u = \frac{x^2}{2}y + C(y)$
Bemerkung: Im folgenden nur gewöhnliche DGL.

Allgemeine Form einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung:

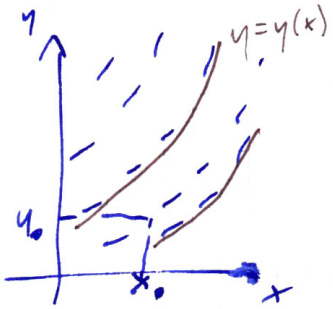
- implizit: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (höchste vorkommende Ableitung $\Rightarrow$ Ordnung n)
- explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ (aufgelöst nach der höchsten Ableitung)
- Die ALLGEMEINE LÖSUNG ist eine Kurvenschar MIT n PARAMTERN (Integrationskonstanten)
- Anfangswertproblem (AWP): n zusätzliche Bedingungen:
  $y(x_0) = a_0, \; y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ (Anfangsbedingungen: Funktionswert und Ableitung an fester Stelle x_0 vorgegeben, siehe Bsp. 1)

7.2 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG

Allgemeine Form: $F(x, y, y') = 0$ (implizit) bzw. $y' = f(x, y)$ (explizit)

7.2.1 GEOMETRISCHE INTERPRETATION

Gegeben $y' = f(x, y), \; (x, y) \in B$
Richtungsfeld: In jedem Punkt $(x, y) \in B$ wird die Richtung mit dem Anstieg $f(x, y) = \tan\alpha$ markiert.



Gesucht: Kurven $y = y(x)$, die sich diesem Richtungsfeld anpassen, d.h. in jedem Punkt (x, y) den vorgegebenen Anstieg von $f(x, y)$ haben, also $y' = f(x, y)$.
(LÖSUNGSKURVEN DER DGL)

7.2.2 DGL MIT TRENNBAREN VARIABLEN

Typ: $y' = f(x) \cdot g(y)$	Bsp. 1: $y' = x \cdot y^2$, $y(1) = -2$
Lösungsmethode	
1. Gleichung aufstellen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$
2. Trennung der Veränderlichen $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\,\mathrm{d}x$
3. beide Seiten integrieren: $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ $G(y) = F(x) + C$ ($G(y)$: Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$) (allgemeine Lösung, implizit)	$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\,\mathrm{d}x$ $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$
4. Falls möglich: Auflösen nach y $y = y(x) = \varphi(x, C)$ (allgemeine Lösung, explizit)	$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$
5. Untersuchen von $g(y) = 0$ (Nebenlösungen)	$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (erfüllt ebenfalls die DGL: Nebenlösung)
6. Bei AWP: AB erfüllen	$x = 1,\ y = -2$ einsetzen in DGL $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$ Lösung des AWP: $y = -\frac{2}{x^2}$

Diskussion:

(1) Rechtfertigung des Lösungsschritts 3:
$G(y) = F(x) + C$ nach x Ableiten liefert:
$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$
$\Rightarrow \frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x)$
$\Rightarrow y' = f(x) \cdot g(y)$
$\Rightarrow G(y) = F(x) + C$ erfüllt die DGL

(2) Spezialfälle:
$y' = f(x)$, d.h. $g(y) = 1$
$y' = g(y)$, d.h. $f(x) = 1$
$y' = \frac{f(x)}{h(x)}$, d.h. $g(y) = \frac{1}{h(y)}$

Bsp. 2: Ein Körper habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur $T_0 = 100°\mathrm{C}$. Die Temperatur der umgebenen Luft sei $T_L = 20°\mathrm{C}$ (=const.). Zur Zeit $t_1 = 10$ (min) hat sich der Körper auf $T_1 = 60°\mathrm{C}$ abgekühlt.

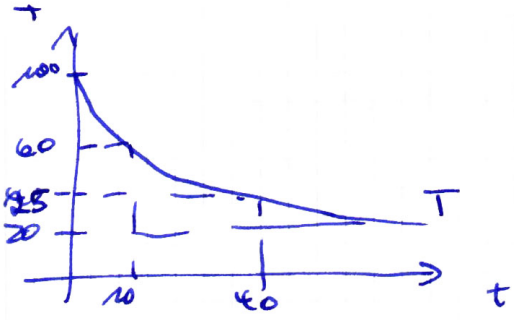
(a) Man ermittle die Temperatur T als Funktion der Zeit t.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t_2 beträgt die Temperatur des Körpers $25°\mathrm{C}$?

Lösung:

(a) Newtonsches Abkühlungsgesetz:
GESCHWINDIGKEIT DER ABKÜHLUNG ist proportional zur TEMPERATURDIFFERENZ ZU MEDIUM
$T = T(t) \ldots$ Temperatur [in °C]
$t \ldots$ Zeit [in min]
$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot (T - T_L)$ mit $T(t) = T_0$ und $T(10) = T_1$
TdV, integrieren $\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_L} = \int \alpha \, \mathrm{d}t$
$\Rightarrow \ln|T - T_L| = \alpha t + C^*$
$\Rightarrow |T - T_L| = e^{\alpha t} \cdot e^{C^*}$
$\Rightarrow T - T_L = C \cdot e^{\alpha t}$ mit $C = \pm e^{C^*}$
Beachte: C ist zunächst $\neq 0$, da vorhandene NB $T - T_L = 0$ ergibt sich, wenn man $C = 0$ zulässt. Sie muss daher nicht extra angegeben werden.
Also ist die allgemeine Lösung: $T = T_L + C \cdot e^{\alpha t}$
AB liefern: $t = 0,\ T = 100 \Rightarrow C = 80$
Bestimmen von α: $t = 10,\ T = 60$
$60 = 20 + 80 \cdot e^{\alpha 10}$
$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2} < 0$
$\Rightarrow$ Lösung: $T = 20 + 80 e^{-t \frac{1}{10} \ln 2}$

(b) Auflösung nach t liefert:
$t = -10 \frac{ln \frac{T-20}{80}}{\ln 2}$
$\overset{T=T_2=25}{=} -10 \frac{\ln \frac{5}{80}}{\ln 2} = 40[\mathrm{min}]$



7.2.3 LINEARE DGL 1. ORDNUNG

Normalform: $y' + a(x)y = h(x)$

- Falls $h(x) = 0$: homogen
- Falls $h(x) \neq 0$: inhomogen

Diskussion:

(1) Linear bezieht sich auf y und y' (1. Potenz: die Faktoren hängen höchstens von x ab. x, muss nicht linear sein). Nicht immer liegt die Normalform vor.
Bsp.:

- $y' + x^2 y - \sin x = 0$: linear, inhomogen ($h(x) = \sin x$)
- $x^2 y' = y$: linear, homogen
- $y' + e^{xy} y = \cos x$: nicht linear
- $y' \cdot y = e^x$: nicht linear (Umstellen würde zu $y' - \frac{1}{y} e^x$ führen)

(2) $h(x)$ heißt auch Störfunktion

(3) Lösungsmethode

a) Bestimmung der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y' + a(x)y = 0$ mittels Trennung der Variablen.

b) Bestimmung EINER partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung mittels Variation der Konstanten.

c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $y = y_h + y_p$

d) Falls AWP vorliegt: AB einsetzen.

Bsp. 3: $y' + \frac{1}{x} y = x$ ist linear und inhomogen

(a) zugehörige homogene DGL:
$y' + \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x} y$
$\overset{TdV}{\Rightarrow} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C^*$
$\Rightarrow |y| = e^{-\ln|x|} \cdot e^{C^*} = \frac{1}{|x|} \cdot e^{C^*}$
$\Rightarrow y_h = C \cdot \frac{1}{x}$ mit $C = \pm e^{C^*}$
wie in Bsp. 2 zunächst $C \neq 0$, Nebenlösung $y_h = 0$ ergibt sich für $C = 0$. Also $C \in \mathbb{R}$ (beliebig).
y_h hat stets die Gestalt $\boxed{y_h = C \cdot \ldots}$

(b) Ansatz: $y_p = C(x) \cdot \frac{1}{x}$ (heißt Variation der Konstanten $C \rightsquigarrow C(x)$)
Damit $y_p' = C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2}$.
Einsetzen des Ansatzes (einschließlich y_p') in die inhomogene DGL:
$C'(x)\frac{1}{x} \underbrace{-C(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}C(x)\frac{1}{x}}_{=0} = x$
$\Rightarrow C'(x) = x^2$
$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{3}x^3 + K$ (setzen aber $K = 0$)
$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{3}x^3$
$\Rightarrow y_p = \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^2$

(c) $y = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2$

7.2.4 WEITER DGLN 1. ORDNUNG

7.2.4.1 ÄHNLICHKEITSDIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(a) Typ $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Lösung: Substitution $\frac{y}{x} = u = u(x)$, d.h. $y = u \cdot x$.

Also $y' = u'x + u$.

$\Rightarrow$ DGL mit trennbaren Variablen für $u = u(x)$

$\rightsquigarrow$ Lösen $\rightsquigarrow$ Rücksubstitution

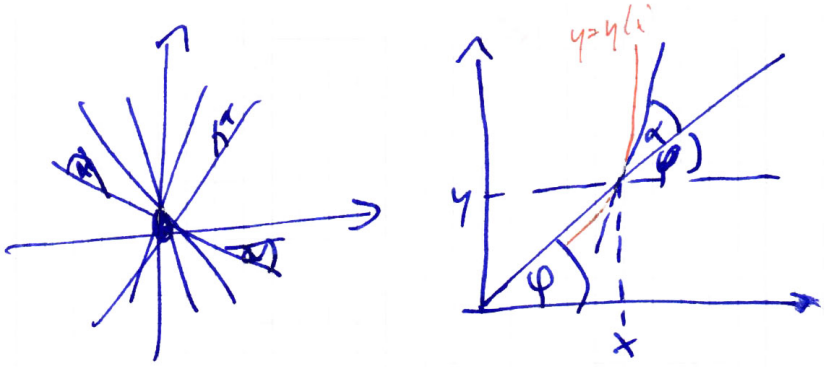
(b) Typ $\boxed{y' = y(ax + by + c)}$

Lösung: Substitution $ax + by + c = u(x)$, d.h. $u' = a + by'$.

Also $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$.

Dann weiteres vorgehen wie bei a.)

Bsp. 4: Gesucht sind Kurven $y = y(x)$, die alle vom Ursprung ausgehende Strahlen unter dem gleichen Winkel α schneiden (isogonale Trajektionen).



$$y' = \tan(\varphi + \alpha) = \frac{\tan\varphi + \tan\alpha}{1 - \tan\varphi\tan\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + \tan\alpha}{1 - \frac{y}{x}\tan\alpha} =: f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitution: $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u = \frac{u + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha}$

$$\Rightarrow u'x = \frac{u + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha} - u = \frac{u^2\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x = \frac{u^2 + 1}{\cot\alpha - u}$$

$$\overset{TdV}{\Rightarrow} \int \frac{\cot\alpha - u}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha \cdot \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) = \ln|x| + C_1$$

Rücksubstitution: $\cot\alpha \cdot \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + \ln|x| + C_1 = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C_1$

Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$, d.h. $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$

$\Rightarrow \cot\alpha \cdot \varphi = \ln r + C_2$

$\Rightarrow r = C \cdot e^{\varphi\cot\alpha}$ mit $C = e^{-C_2}$

... ist die logarithmische Spirale

7.2.4.2 EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die DGL $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ mit $P_x = Q_y$ (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) heißt exakte DGL.
Lösung:
Unter den sogenannten Integrabilitätsbedingungen $P_y = Q_x$ existiert eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ (F ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt). Die allgemeine Lösung der exakten DGL ist dann die Kurvenschar $\boxed{F(x,y) = C}$ (Höhenlinien von F).

Bemerkung: Ist eine DGL in obiger Gestalt nicht exakt (d.h. $P_y \neq Q_x$), so gibt es oft einen integrierenden Faktor $M = M(x,y)$, so dass die DGL $P \cdot M + Q \cdot M \cdot y' = 0$ exakt wird.

7.3 LINEARE DGLN HÖHERER ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Allgemeine Form: $L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

BESTIMMUNG EINER ALLGEMEINEN LÖSUNG

... y_h der zugehörigen homogenen DGL $L(y) = 0$.

Satz 1: Die Gleichung $L(y) = 0$ besitzt n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist dann $y_h = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$

Diskussion:

(1) Die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ heißt (ein) Fundamentalsystem (FS) von Lösungen der homogenen DGL.

(2) Mit dem Ansatz $y_h = e^{\lambda x}$ erhält man die charakteristische Gleichung $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

Satz 2: Jede f-fache Nullstelle λ_0 des charakteristischen Polynoms liefert die folgenden Funktionen des FS:
λ_0 reell:
$e^{\lambda_0 x}, x \cdot e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda_0 x}$ (m Funktionen)
$\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) komplex (dann ist auch $\lambda - i\beta$ eine m-fache Nullstelle):
$e^{\lambda x}\cos(\beta x), xe^{\lambda x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\cos(\beta x)$
$e^{\lambda x}\sin(\beta x), xe^{\lambda x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\sin(\beta x)$ ($2m$ Funktionen)

Diskussion:

(1) Beispiele für die Zuordnung der Lösung der charakteristischen Gleichung $\rightarrow$ FS

Lösungen λ_k der char. Gl.	FS
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$	$\{1, e^{2x}, e^{-x}\}$
$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4,5} = 3$	$\{1, x, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$	$\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$
$\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm i$	$\{\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x\}$

(2) $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$
$\Rightarrow C_1 e^{(\lambda+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$
$= C_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + C_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$
$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_1^*} e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{C_2^*} i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
(Dies erläutert die komplexe Lösung in Satz 2)

BESTIMMUNG EINER PARTIKULÄREN LÖSUNG

... der inhomogenen DGL
1. MÖGLICHKEIT: Variation der Konstanten (stets möglich)
2. MÖGLICHKEIT: Spezieller Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für häufig vorkommende Störfunktionen $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich

Satz 3:

(1) Die Störfunktion h habe die Gestalt $h(x) = e^{\alpha x}(p_1(x)\cos(\beta x) + p_2(x)\sin(\beta x))$ wobei p_1 und p_2 Polynome mit maximalem Grad r sind.

(2) Sei $\varrho \geq 0$ die Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$
FALL 1: $\varrho = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha + i\beta$ ist keine Nullstelle)
$\Rightarrow L(y) = h(x)$ besitzt Partikulärlösung der Form
$\boxed{y_p = e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))}$
wobei Q_1, Q_2 Polynome vom Grad r mit unbestimmten Koeffizienten sind.
FALL 2: $\varrho > 0$ (Resonanzfall)
Dann hat y_p die Form
$\boxed{y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \cdot x^{\varrho}}$

Diskussion:

(1) Beispiel für die Zuordnung $h(x) \rightsquigarrow$ Ansatz für y_p

Lösung λ_i der char. Gl.	$h(x)$	α	β	$\alpha + i\beta$	ϱ	r	Ansatz für y_p
$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = -1$	$x^2 + 1$	0	0	0	3	2	$\underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{Q_1(x)} x^3 = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
$\lambda_1, \lambda_2 = 3$	$4e^{-x}$	-1	0	-1	0	0	Ae^{-x}
$\lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_3 = 3$	$\sin(3x)$	0	3	$3i$	0	0	$A\cos(3x) + B\sin(3x)$
$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 0$	$x^3 e^{-2x}$	-2	0	-2	1	3	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-2x}x$

(2) Falls die Störfunktion die Form $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots$ hat, so wählt man den Ansatz $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots$ mit y_{p_i} ist Partikulärlösung von $L(y) = h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$

LÖSUNG DER DGL

$\boxed{y = y_h + y_p}$

Bsp. 1: $y'' - 3y' = -\sin(3x)$

(a) allgemeine Lösung:
char. Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$
$\Rightarrow$ FS ist $\{1, e^{3x}\}$
$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 e^{3x}$

(b) partikuläre Lösung:
$h(x) = -\sin(3x) \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 3 \Rightarrow \alpha + i\beta = 3i \Rightarrow \varrho = 0,\ r = 0$ ($3i$ keine Lösung der char. Gl.)
Ansatz:
$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$
$y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$
$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$
Einsetzen in inhomogene DGL:
$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) = -\sin(3x)$
Koeffizientenvergleich:
$\cos(3x)$: $-9A - 9B = 0 \Rightarrow A = -B$
$\sin(3x)$: $-9B + 9A = -1 \Rightarrow -18B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{18},\ A = -\frac{1}{18}$
$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{18}\cos(3x) + \frac{1}{18}\sin(3x)$

(c) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{18}\cos(3x) + \frac{1}{18}\sin(3x)$

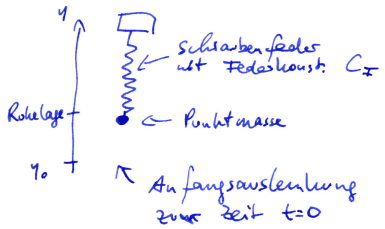
Bsp. 2: $y^{(4)} - 3y''' = 36x^2 - 5$

(a) char. Gleichung: $\lambda^4 - 3\lambda^3 = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 3$
$\Rightarrow FS = \{1, x, x^2, e^{3x}\}$
$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^3 x$

(b) $h(x) = 36x^2 - 5$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 \Rightarrow \varrho = 3$
Ansatz:
$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\underbrace{x^3}_{x^\varrho}$
$= Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
$y_p' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2$
$y_p'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx$
$y_p''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C$
$y_p^{(4)} = 120Ax + 24B$
Einsetzen:
$120Ax + 24B - 180Ax^2 - 72Bx - 18C = 36x^2 - 5$
Koeffizientenvergleich:
x^2: $-180A = 36 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$
x^1: $120A - 72B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$
x^0: $24B - 18C = -5 \Rightarrow C = -\frac{1}{6}$
$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3$

(c) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^3 x - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3$

Bsp. 3: Anwendung: Federschwingungsgleichung



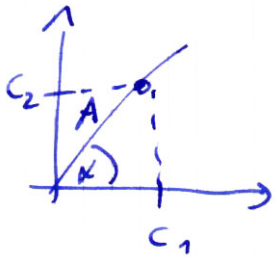
Grundgesetz der Mechanik: $m\ddot{y} = K = K(y, \dot{y}, t)$

$m\ddot{y} = -\underbrace{\alpha\dot{y}}_{\substack{\text{Reibungskraft}\\ \text{proportional}\\ \text{zur Geschw. } \dot{y}}} - \underbrace{c_F y}_{\substack{\text{Rückzugskraft}\\ \text{proportional}\\ \text{zur Auslenkung } y}} + \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}}$

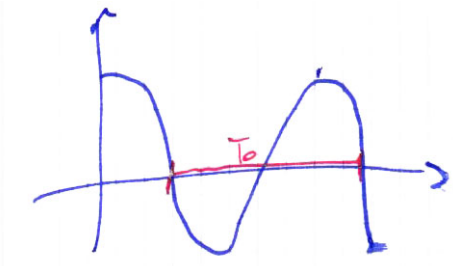
mit $\gamma := \dfrac{\alpha}{2m} > 0$ wobei $\omega_0^2 := \dfrac{c_F}{m}$ und $h(t) = \dfrac{F(t)}{m}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = h(t)}$ mit AB $y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = v_0$

- FALL 1: $h(t) = 0$ (keine äußere Kraft, freie Schwingung)
  DGL: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ (ist homogen, d.h. allgemeine Lösung $y = y_h$)
  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
  - FALL 1A: $\gamma = 0$ (keine Reibung, freie und ungedämpfte Schwingung)
    $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$
    $\Rightarrow FS = \{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$
    $\Rightarrow y = y_h = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$ mit

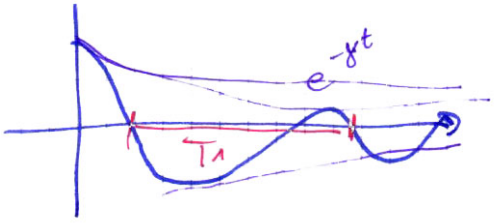


    $C_1 = A\cos\varphi,\ C_2 = A\sin\varphi$ folgt:
    $y = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$
    Mit AB lassen sich C_1 und C_2 (bzw. A und φ) berechnen, z.B. $v_0 = 0 \Rightarrow C_1 = y_0,\ C_2 = 0$
    $\Rightarrow y = y_0\cos(\omega_0 t)$
    $T := \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ ... Schwingdauer, ω_0 ... Eigenfrequenz

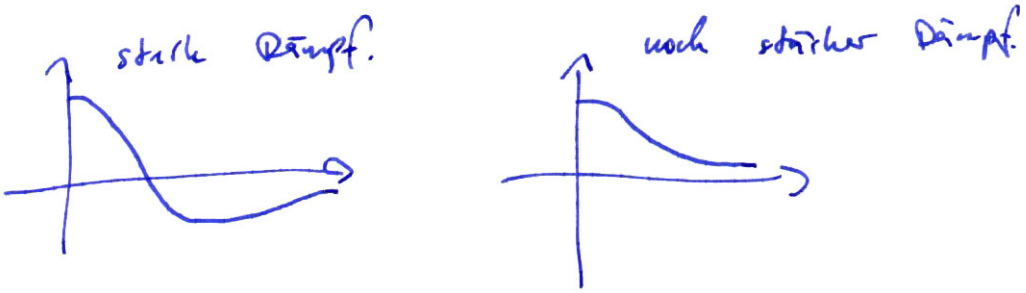


  - FALL 1B: $0 < \gamma < \omega_0$ (kleine Dämpfung, freie gedämpfte Schwingung)
    $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1} i$
    $\Rightarrow FS = \{e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t, e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)\}$

$y = y_h = (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t))e^{-\gamma t}$
$\omega_1 < \omega 0 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} > T_0$:



– FALL 1C: $\gamma \geq \omega_0$ (starke Dämpfung)
$\lambda_{1,2}$ reell und negativ:



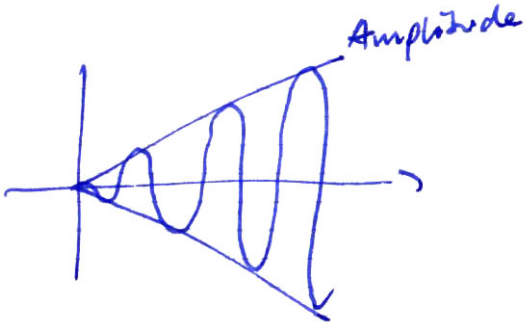
(z. B. möglich, wenn $sgn(v_0 y_0) < 0$ [Anm.: $sgn(x)$: Vorzeichen von x])

FALL 2: äußere Kraft $F(t)$ existiert $\Rightarrow$ erzwungene Schwingung
hier nur Fall $\gamma = 0$, $h(t) = a\sin(\omega_0 t)$:
DGL: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = a\sin(\omega_0 t)$
keine Dämpfung, periodische Kraft mit Frequenz = Eigenfrequenz ω_0

(a) $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$
$\Rightarrow y_h = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ (wie in 1a)

(b) y_p ermitteln:
$h(t) = a\sin(\omega_0 t)$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega_0 \Rightarrow \alpha + i\beta = i\omega_0 \Rightarrow \varrho = 1$ (Resonanzfall)
Ansatz:
$y_p = (A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t))t$
Setzen wir dies in die inhomogene DGL ein und nutzen den Koeffizientenvergleich, ergibt sich $A_1 = -\frac{a}{2\omega_0}$, $A_2 = 0$.
$\Rightarrow y_p = -\frac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$

(c) Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$



Resonanz! Wachsende Amplitude mit $\frac{at}{2\omega_0} \Rightarrow$ Resonanzkatastrophe!