Fakultät Informatik/Mathematik

Lehrstuhl für Stochastik

HOCHSCHULE FÜR
TECHNIK UND WIRTSCHAFT
DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorlesungsmitschrift

MATHE 2

Mitschrift von

Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von

Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

5. Mai 2017

INHALTSVERZEICHNIS

. . . weiter von Mathe 1

2.1.3 UNENDLICHE REIHEN

2.1.3.1 GRUNDBEGRIFFE

Def. 6: Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_n)_n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$. Die Zahlenfolge $(S_n)_n \geq n_0$ mit $S_{n_0} := a_{n_0},\ S_{n_0+1} := a_{n_0} + a_{n_0+1},\ S_{n_0+2} := a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2},\ ...,\ S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n$ (PARTIALSUMEENFOLGE) heißt UNENDLICHE REIHE.

Bezeichnung: $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n}$

- Die Zahlen a_n heißen Glieder der Reihe, die Zahlen S_n heißen Partialsummen der Reihe
- Ist die Reihe konvergent, d.h. die Folge (S_n) ist konvergent, so heißt $s := \lim_{n\to\infty} S_n =: \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ die Summe der Reihe
- Die Reihe heißt (bestimmt oder unbestimmt) divergent, wenn die Partialsummen die entsprechende Eigenschaft haben.

Bemerkung: Oft $n_0 = 0$ oder $= 1$

Bsp. 6: $a_n = aq^n$ mit $a \neq 0, q \neq 0, n = 0, 1, 2, ...$
$(a_n) = (a, aq, aq^2, aq^3, ...)$ (GEOMETRISCHE ZAHLENFOLGE)
$(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (GEOMETRISCHE REIHE)
$= (\underbrace{a}_{s_0}, \underbrace{a + aq}_{s_1}, \underbrace{a + aq + aq^2}_{s_2}, ...)$
$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n \quad | \cdot q$
$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n+1}$
Beide Zeilen voneinander abgezogen:
$S_n - S_n q = a - aq^{n+1}$
$S_n(1 - q) = a - aq^{n+1} \quad | : (1 - q)$ falls $q \neq 1$
$\boxed{S_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (SUMMENFORMEL FÜR DIE ENDLICHE GEOMETRISCHE REIHE mit Anfangsglied a und $n + 1$ Summanden)
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{a - q}$ falls $|q| < 1 \Rightarrow$ Summe der unendlichen geometrischen Reihe:
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}}$ für $|q| < 1$.
z.B. $0,\overline{72} = 0,727272... = \frac{72}{100} + \frac{72}{10.000} + \frac{72}{1.000.000} + ... = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

Bsp. 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ heißt HARMONISCHE REIHE. Offensichtlich ist (S_n) streng monoton wachsend. Man kann zeigen, dass (S_n) nicht beschränkt ist. Aus Satz 3 folgt: die harmonische Reihe ist bestimmt divergent.

Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Def. 7: Die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt

(a) absolut konvergent, falls $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

(b) bedingt konvergent, falls $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a|$ nicht konvergent ist.

Satz 5: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Diskussion:

(1) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Z.B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

(2) Für Reihen mit nicht-negativen Gliedern ($a_n \geq 0$ für alle n) ist absolute Konvergenz identisch mit (gewöhnlicher) Konvergenz. Für solche Reihen gilt entweder $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ [(absolut) konvergent] oder $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ [bestimmt divergent].

2.1.3.2 KONVERGENZKRITERIEN

1. Notwendiges Konvergenzkriterium

Satz 6: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

bzw.: (a_n) konvergiert $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

Beweis: $a_n = S_n - S_{n-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = s - s = 0$

Bemerkung:

a) Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend. Z.B. $a_n = \frac{1}{n}$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

b) Anwendung des Satzes meist in logisch äquivalenter Form: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ divergiert

Bsp. 8: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n-1} \right)^{50}$

$a_1 = 1,94 \cdot 10^{-48}, a_2 = 1,3 \cdot 10^{-49}, ...$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{10 - \frac{1}{n}} \right)^{50} \neq 0$

$\Rightarrow$ Reihe divergent (sogar besimmt divergent, da alle $a_n \geq 0$)

2. Hinreichendes Kriterien

(A) Leibnitzkriterium für alternierende Reihen

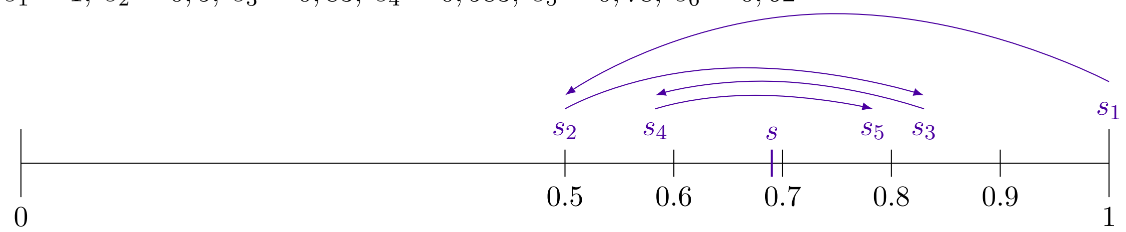
Satz 7: Sei (b_n) Folge mit

- $b_n \geq b_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ...$ konvergent. D.h. wenn die Beträge b_n der Glieder einer alternierenden Reihe mit $a_n = (-1)^n b_n$ eine Nullfolge bilden, dann ist die Reihe konvergent.
Weiter gilt: $|s - S_n| \leq |a_{n+1}|$
Also ist der Fehler bei der Approximation von s durch S_n beschränkt durch den Betrag von a_{n+1}.

Bsp. 9: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ (alternierende harmonische Reihe)

$s_1 = 1, \; s_2 = 0,5, \; s_3 \approx 0,83, \; s_4 \approx 0,583, \; s_5 \approx 0,78, \; s_6 \approx 0,62$



Man kann zeigen: $s = \ln 2 = 0,6931$

(B) Verleichskriterien für Reihen mit nicht-negativen Gliedern

Satz 8: (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_n)_{n \geq n_0}, (b_n)_{n \geq n_0}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_1 \geq n_0$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$ (d.h. konvergent).

Dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ (d.h. konvergent).

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ heißt dann konvergente Majorante zur Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Beweisidee: $0 \leq a_n \leq b_n \rightsquigarrow 0 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \leq \infty$

Satz 9: (Minoranten-Kriterium)

Seien $(a_n)_{n\geq n_0}, (b_n)_{n\geq n_0}$ Folgen mit $0 \leq b_n \leq a_n$ für $n \geq n_1 \geq n_0$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (d.h. divergent)

Dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (also auch divergent)

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ heißt divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Eine nützliche Vergleichsreihe für die Anwendung der Sätze 8 und 9 ist:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \lambda > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \lambda \leq 1 \end{cases}}$$

Bsp. 10: Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2-n+1}}_{a_n}$ (Vermutung: Verhalten wie $\sum \frac{1}{n^2}$ wegen der Dominanz der höchsten Potenz)

Wir versuchen eine konvergente Majorante zu finden.

$a_n = \frac{1}{n^2-n+1} \geq \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}}$ (wegen $n \geq \frac{n^2}{2}$ für $n \geq 2$)

Somit $\frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2} =: b_n$

Mit der Vergleichsreihe gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

$\overset{\text{Satz 8}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent, sogar absolut konvergent, da $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^3+n^2+31}$ (Vermutung: divergent, da Verhalten wie $\sum \frac{n^2}{n^3} = \sum \frac{1}{n}$)

Wir versuchen divergente Minoranten zu finden.

$a_n = \frac{n^2+4}{n^3+n^2+31} \geq ... \geq \frac{1}{3n} =: b_n$ (für $n \geq 4$)

Wieder gilt mit der Vergleichsreihe: $\sum b_n$ divergent. Also folgt mit Satz 9: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(C) Quotienten- und Wurzelkritierien

Satz 10: (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge, so gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}}$$

Satz 11: (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist} \begin{cases} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$$

Bemerkung: Falls in Satz 10 oder 11 $\lim ... = 1$ gilt, so ist mit diesem Kriterium keine Konvergenzaussage möglich.

Bsp. 11:

a.) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n \cdot (-1)^n}_{a_n}$

Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ln n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ liefert das Wurzelkriterium, dass die Reihe absolut konvergent ist.

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2}$

Wegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+4n+2n+2}{n^2+2n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$

Daher ist die Reihe divergent.

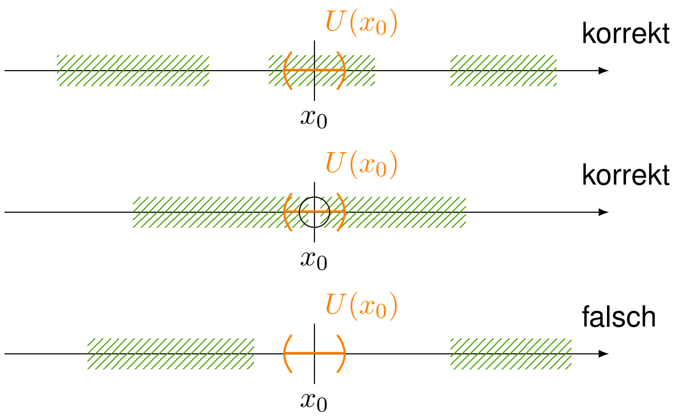
2.1.3.3 RECHENREGELN

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konvergent mit Summe a und b, dann gilt:
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ⇔ die Glieder a_n lassen sich beliebig umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent mit Summen a und b, dann gilt:
  - $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = a \cdot b \qquad \left(= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i} \quad \text{Cauchy-Produkt}\right)$

2.2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

2.2.1 GRENZWERTE VON FUNKTIONEN

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0)\{x_0\} \subseteq Db(f)$.

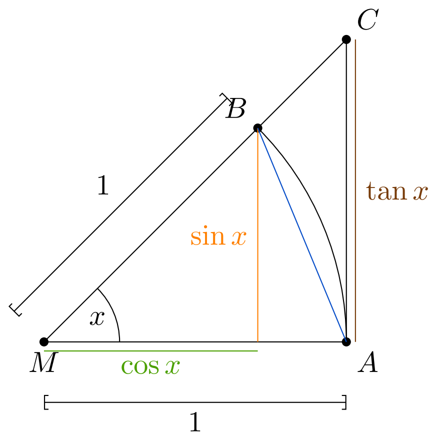


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x$ (für alle n) und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen a, wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss NICHT selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$



$$F_{\triangle MAB} \leq F_{Sektor\ MAB} \leq F_{\triangle MAC}$$
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sin x}$$
$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 7x + 4}{3 \cos x} = \dfrac{4}{3}$

b.) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{"0"}{0}$ Satz nicht anwendbar.

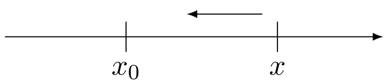
$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} x + 2 = 5$

(andere Möglichkeit mit $\dfrac{"0"}{0}$ umzugehen lernen wir später)

Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.



Andere Schreibweise: $\lim\limits_{x \searrow x_0} = \lim\limits_{x \to x_0 + 0}$

b.) linkseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog rechtsseitiger Grenzwert

c.) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

d.) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog s.o.

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim\limits_{\bullet} f(x) 0 \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

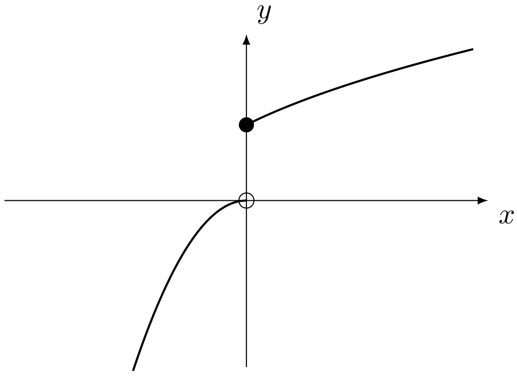
$\bullet \begin{cases} x \to x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Satz 2:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} = a$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \ \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht!

Bsp. 4:

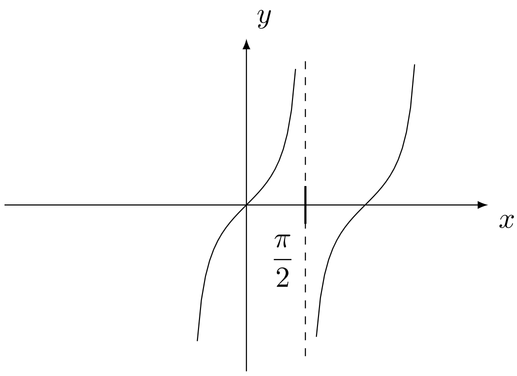
$\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) =$ "$\infty \cdot 0$"

$\overset{u=\frac{4}{x}}{=} \lim\limits_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$

Bsp. 5:

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

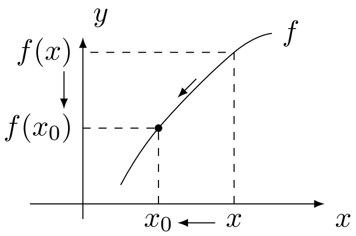
$\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$



2.2.2 STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, \ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben.
Es heißt f:

a.) stetig in x_0 falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



b.) linksseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

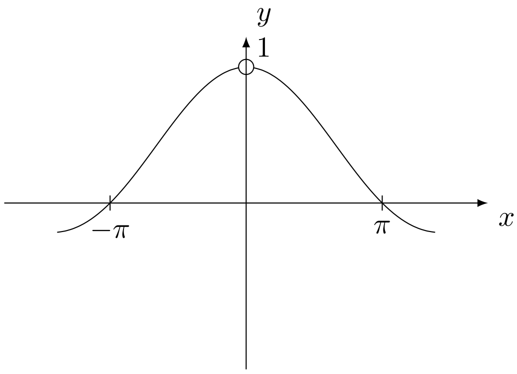
c.) rechtsseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

a.) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

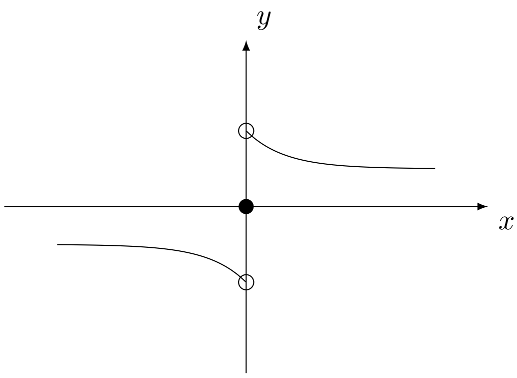
Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

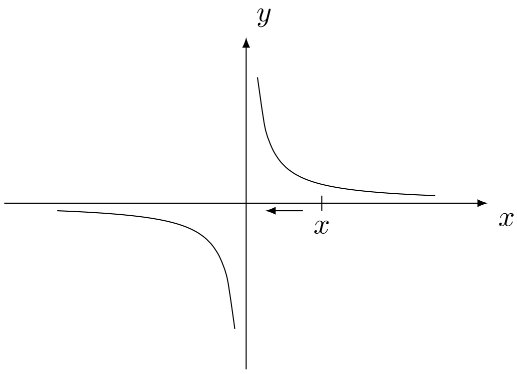


b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x)$

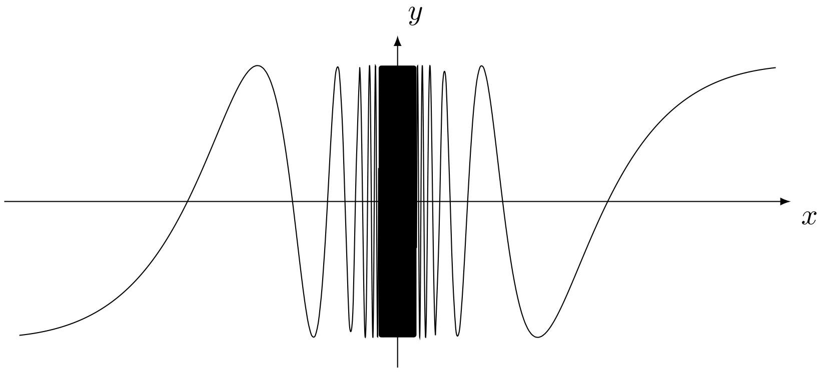
Bezeichnung: endlicher Sprung.



c.) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.



d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nicht existiert.



Def. 4: Die Funktion $f : DB(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) IN EINEM INTERVALL $I \subset Db(f)$ STETIG, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) STETIG, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in 1.4.1 und 1.4.3 betrachteten Funktionen ist stetig.

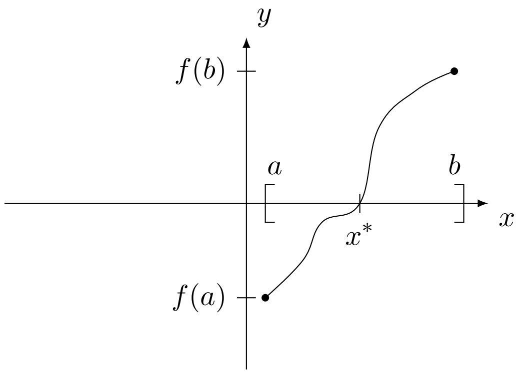
Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0, so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g,\ f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$(falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)
Seien $g : Db(g) \to \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:
Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0.

Satz 5: (Zwischenwertsatz)
Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben

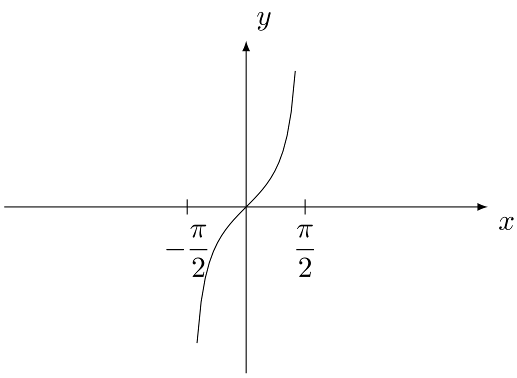
unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = 0$



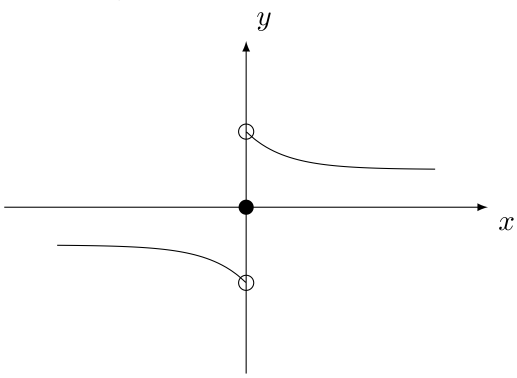
Satz 6: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.



b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1,1]$ an.



2.3 POTENZREIHEN

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0.

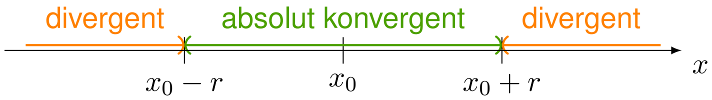
Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R} | \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutz man Satz 10 und 11 aus 2.1.3.1 und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.
Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert.

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$.



Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
  - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$
  - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x - x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius.
  Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus $\to$ gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\Rightarrow$ Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$
Randpunkte:

$x = -1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)

$x = 1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r = \infty$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: BESTÄNDIGE KONVERGENZ

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + ...$ d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n\text{ungerade} \end{cases}$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{(2n)!}$ $(\sum b_n(u-u_0)^n)$

$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)\cdot(2n+1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x =$ "$\sqrt{\infty}$" $= \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$ (geometrische Reihe)

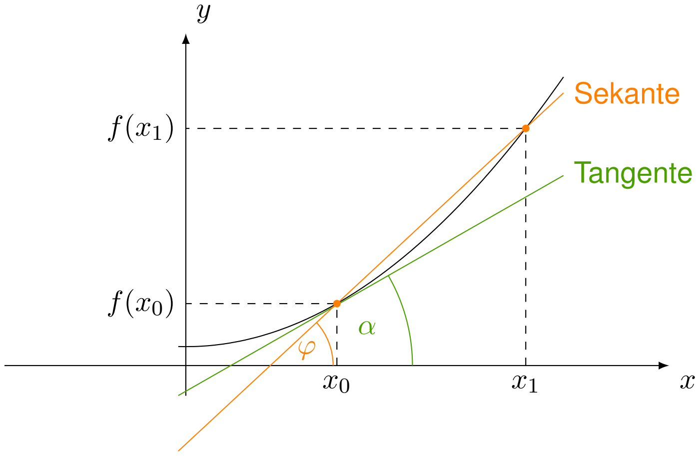
b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ (Beweis später)

Satz 2: Die GRENZFUNKTION jeder Potenzreihe ist IM KONVERGENZBEREICH STETIG.

3 DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN

3.1 GRUNDBEGRIFFE

TANGENTENPROBLEM



Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \to x_0$
- Damit geht Sekante über in die Tangente.
  Außerdem geht φ in α über.

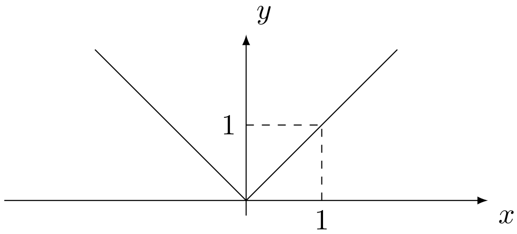
$$\tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \tan\varphi = \lim_{x_1\to x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls der Grenzwert $\boxed{f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existiert.
$f'(x_0)$ heißt dann 1. ABLEITUNG von f an der Stelle x_0.

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) Anstieg der Tangente ist als $m = \tan\alpha = f'(x_0)$

- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
  z.B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:



Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis:
Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.
$\Rightarrow \exists\ K > 0$ mit $\left| \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \dfrac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$
$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f$ ist stetig.

Def. 2: Eine Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$
$Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) differenzierbar im Interval $I \subseteq Db(f)$, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.
d.h. $\lim\limits_{x \nearrow x_r}$ bzw. $\lim\limits_{x \searrow x_r} \dfrac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ existiert

b.) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in Db(f)$ differenzierbar ist.

SCHREIBWEISE:
Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit
$f' : Db(f') \to \mathbb{R}, f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
wobei $Db(f')$ aus allen Punkten $x \in Db(f)$ besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv die n-te Ableitung von f an der Stelle x_0 mittels
$f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, ...$
wobei $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) : x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^n - x^n\right) \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

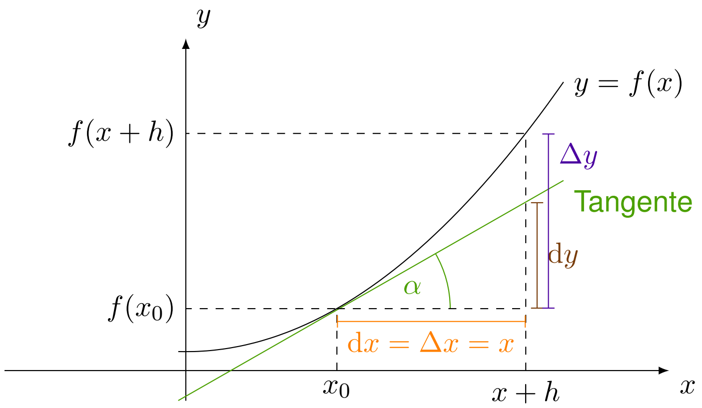
d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bsp. 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} && \Big|\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot \\ &= \frac{2\cdot\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} && \Big|\ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Also $f'(x) = \cos x$.
BEMERKUNG: Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen. Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

3.1.1 DAS DIFFERENTIAL



$\mathrm{d}y$: Veränderung der Funktion

Δy: Veränderung der Tangente

$\mathrm{d}y = h\cdot\tan\alpha = f\cdot f'(x_0)$

Def. 4:

a.) $\mathrm{d}y := f'(x_0)\cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende DIFFERENTIAL von f.

b.) $\Delta y := f(x_0+h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende DIFFERENZ von f.

Diskussion

(1) Δy ist die Änderung der Funktion f, wenn x in $x+h$ übergeht; $\mathrm{d}y$ ist die entsprechende Änderung wenn statt f die Tangente an der Stelle x_0 betrachtet wird (Linearisierung).

(2) Für kleine Zuwächse Δx gilt: $\Delta y \approx \mathrm{d}y$
d.h. $\Delta y \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ für kleines Δx (nutzt man in der Fehlerrechnung)

(3) Sei $y = f(x) = x \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}x = 1\cdot h$ also $\boxed{h = \Delta x = \mathrm{d}x}$

(4) Damit $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient
andere Schreibweise: $f'(x) = \dfrac{d}{\mathrm{d}x}f(x)$

(5) Höhere Ableitungen:
$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$

3.2 DIFFERENTIATIONSREGELN

Satz 1: Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$ (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Produktregel)
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

Bsp. 1:

a.) $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

b.) $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$ (Produktregel)

c.) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$ (Quotientenregel)

Satz 2: Seien $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ g : Db(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R},\ Db(g) \subseteq \mathbb{R}$ und

- g bei $x_0 \in Db(g)$ differenzierbar
- f bei $g(x_0) \in Db(f)$ differenzierbar

so gilt:
$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise:
$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{\mathrm{d}x}$ (äußere Ableitung · innere Ableitung)

Bsp. 2:

a.) $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_{u}$

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{\mathrm{d}x} = \cos u \cdot 3 = 3 \cos 3x$

b.) $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$
Substitution:
$u := \tan 3x$
$v := 3x$
$\Rightarrow y = 2^u,\ u = \tan v$
$\Rightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{\mathrm{d}x} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$

Bsp. 3: (Logarithmische Differentiation)
$f(x) = x^{\sin x} \qquad x \in (0, \infty)$
Basis und Exponent hängen von x ab!
Die Regeln $(x^a)' = ax^{a-1}$ bzw. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ sind nicht unmittelbar anwendbar.
Betrachten:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\sin} \\
\ln(f(x)) &= \sin x \cdot \ln x \\
\overset{\text{Ableiten}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\
\Rightarrow f'(x) &= f(x) \cdot (cos(x) \cdot \ln x + \sin x \frac{1}{x}) \\
&= x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

Satz 3: Sei $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Kurvenradius r.
Dann gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}$

Bsp. 4: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad |x| < 1$

3.3 ANWENDUNGEN

3.3.1 TAYLORSCHE FORMEL, TAYLOR-REIHE

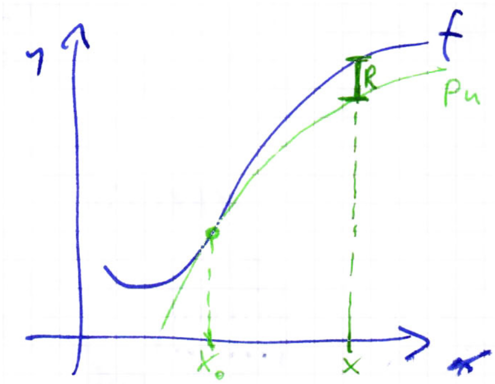
PROBLEM: „Komplizierte" Funktionen f soll in der Umgebung von x_0 durch ein Polynom p_n n-ten Grades angenähert werden.
ANSATZ: $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$
FORDERUNG: $p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0),\ p_n''(x_0) = f''(x_0), ...$
liefert: $p_n(x_0) = a_0,\ p_n'(x_0) = a_1,\ p_n''(x_0) = 2a_2, ...$
und $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.
Allgemein: $\boxed{p_n^{(k)} = k!a_k}$ für $k = 0, 1, ..., n$

Def. 1: Das Polynom $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ heißt TAYLORPOLYNOM n-ten Grades mit Entwicklungsstelle x_0.

Diskussion:

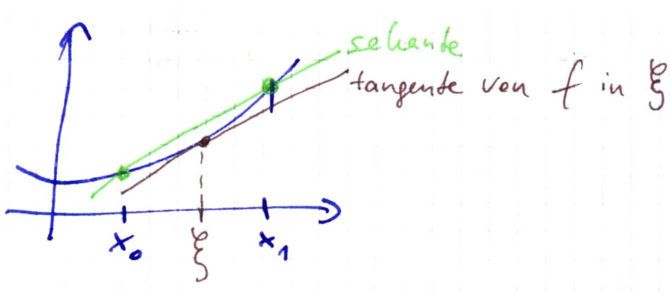
(1) p_n ist eine Näherung für f.
Fehler: $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$ heißt Restglied

(2) Restglied ist im Allgemeinen umso kleiner, je kleiner $|x - x_0|$ ist und je größer n ist.



Satz 1: Taylorsche Formel
Es sei f in $[a,b]$ $(n+1)$-mal differenzierbar, sowie $x_0, x \in [a,b]$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x (d.h. $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ mit $\vartheta \in (0,1)$) mit $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$: RESTGLIEDFORM VON LAGRANGE.
Es gilt also $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$

Diskussion: Spezialfall $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ (MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG)



Satz sagt: es gibt zwischen x_0 und x_1 einen Punkt auf der Funktion, sodass die Senkante die Tangente dieses Punktes ist.

Umstellen liefert: $\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Anstieg der Tangente}} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$

Bsp. 1: $f(x) = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = ...$$
$$\overset{x_0=0}{\Longrightarrow} f'(0) = 1 = f''(x) = f'''(x) = ...$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

Für $x = \frac{1}{10} = 0,1$ und $n = 4$ gilt:

$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \underbrace{\frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{R_4(0,1)}$ für ein $\vartheta \in (0,1)$.

$\Rightarrow e^{0,1} = \underbrace{1 + 0,1 + 0,005 + 0,0001\overline{6} + 0,0000041\overline{6}}_{=1,1051708\overline{3}} + R_4(0,1)$ Abschätzen des ϑ:

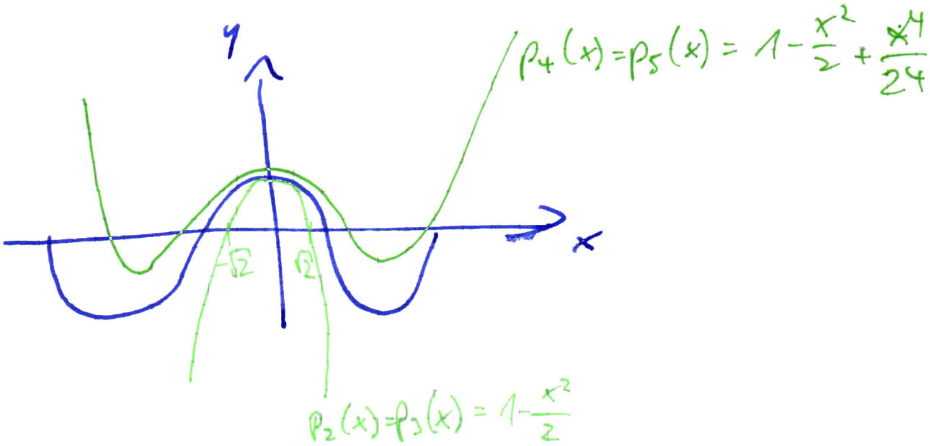
$$8,\overline{3} \cdot 10^{-8} = \frac{0,1^5}{5!} = \frac{0,1^5}{5!} e^0 < \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} e^{1 \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 25 \cdot 10^{-8}$$
$$\Rightarrow 1,1051708\overline{3} + 8,\overline{3} \le e^{0,1} \qquad \le 1,1051708\overline{3} + 25 \cdot 10^{-8}$$
$$1,10517091\overline{6} \le e^{0,1} \qquad \le 1,10517108\overline{3}$$

Bsp. 2:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x),\ x_0 = 0 &&\Rightarrow f(x_0) = 1\\
f'(x) &= -\sin x &&\Rightarrow f'(x_0) = 0\\
f''(x) &= -\cos x &&\Rightarrow f''(x_0) = -1\\
f'''(x) &= \sin x &&\Rightarrow f'''(x_0) = 0\\
f^{(4)}(x) &= \cos x &&\Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1\\
&...
\end{aligned}$$

$n = 2m + 1$

$$\cos x = \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} \underbrace{-\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0}{2!}(x-x_0)^2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$



Näherung: $\cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2}$ für $|x| \ll 1$

Fehler: $|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$

Bsp.:

$\cos 5^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right) = \underbrace{1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2}}_{0{,}9961923} + R_3$

...

$|R_2| \leq \frac{\pi^4}{36^4 \cdot 24} = 2,416 \cdot 10^{-6}$

genau gilt: $\cos 5^\circ = 0,99619$ (auf 5 Stellen genau)

Bsp. 3: $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\
&\dots \\
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \dots \cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\
&= \binom{\alpha}{k} \cdot k!(1+x)^{\alpha-k}
\end{aligned}$$

wir betrachten $x_0 = 0$

$f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1),\ \dots,\ f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n \\ \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{kann für beliebige } n \in \mathbb{R} \text{ ausgewertet werden.} \end{cases}$$

$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$ mit $\vartheta \in (0,1)$

Bsp. 4: $f(x)\dots$ Polynom n-ten Grades

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow R_n(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Taylorpolynom stellt f exakt dar (Entwicklung nach Potenzen von $(x - x_0)$)

3.3.1.1 TAYLOR REIHEN

Satz 2: Es sei f auf $U(x_0)$ beliebig oft differenzierbar und es gelte $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Dann gilt $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$.

Denn: Taylor-Formel sagt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$. Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Bsp. 5: $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ (vgl. Bsp. 1)

Es gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Wähle n_0 so, dass $q := \frac{|x|}{n_0} < 1$.
$\Rightarrow$ für $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|\vartheta x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&< e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n_0} \underbrace{\cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n_0}}_{(n-n_0+1) \text{ Faktoren}} \\
&= e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot q^{n-n_0+1} \to 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 6: $\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}(x)$ (vgl. Bsp. 2)
Ähnlich wie in Bsp. 5 kann man zeigen $\lim_{n\to\infty} R_{2m+1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$
Analog: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 7: Restgliedunterscuhung in Bsp. 3 führt zu:
$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$
z.B. für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \\
&\approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \text{falls } |x| \ll 1
\end{aligned}$$

3.3.2 GRENZWERTBESTIMMUNG MITTELS DER REGEL VON L'HOPITAL

Satz 3: (Regel von l'Hopital)
Es gelte:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

(2) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (als eigentlicher und uneigentlicher Grenzwert).

Dann folgt: $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$ $\left(\text{Typ: } "\frac{0}{0}"\right)$
Die gleiche Aussage gilt, wenn 1.) ersetzt wird durch

1'.) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ $\left(\text{Typ: } "\frac{\infty}{\infty}"\right)$

BEWEIS: seien f, g, f', g' stetig in x_0 und $g'(x_0) \neq 0$

Mittelwertsatz: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{0} + f'(\xi)(x-x_0)}{\underbrace{g(x_0)}_{0} + g'(\xi)(x-x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Bsp. 8:

a.) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

b.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

c.) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$

Regel also auch mehrfach hintereinander anwendbar.

d.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

...

$\Rightarrow$ Satz nicht anwendbar, da 2.) nie erfüllt ist.

Aber:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{x+1} - e^{-(x+1)}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{x+1}\left(1 - e^{-2(x+1)}\right)}{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)} = e \underbrace{\lim \frac{1 - e^{-2(x+1)}}{1 + e^{-2x}}}_{=1} =$

e

Diskussion:

(1) Man beachte, dass der Anwendung von Satz 3 Zähler und Nenner einzeln differenziert werden (keine Quotientenregel)!

(2) Falls $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, DARF MAN NICHT schlussfolgern, dass $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert (siehe Bsp. 9).

Bsp. 9: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+\sin x}{3x-\cos x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5+\cos x}{3+\sin x}$ existiert nicht.
1.) erfüllt, 2.) nicht erfüllt $\Rightarrow$ Satz nicht anwendbar
Aber:
$\frac{5x+\sin x}{3x-\cos x} = \frac{x\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(3-\frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{5+\frac{\sin x}{x}}{3-\frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{5}{3}$
Weitere unbestimmte Ausdrücke:
Durch Zurückführen auf $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ oder $\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ lässt sich auch folgendes behandeln:

"$0\cdot\infty$": $f(x)\cdot g(x)$ als Doppelbruch schreiben, d.h. $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ist dann vom Typ $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ oder $\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$.

"$\infty-\infty$": Ausklammern $f(x)-g(x) = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ oder falls Brüche vorliegen Hauptnenner bilden.
"0^0"/"1^∞"/"∞^0": Umformung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a} \exp\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to a} \exp\left(g(x)\ln f(x)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to a} \underbrace{g(x)\cdot\ln f(x)}_{\text{Typ "}0\cdot\infty\text{"}}\right)
\end{aligned}$$

Bsp. 10:

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \tan x\cdot\cot 3x \overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\frac{1}{\cot 3x}}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 3x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x}{3(1+\tan^2 3x)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

b.) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x-1}\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-\sin x}{\sin x\cdot(e^x-1)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \ldots$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{\cos x(e^x+1)+\sin(x)\cdot e^x}$
$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+\sin x}{-\sin x\cdot(e^x-1)+\cos(x)\cdot e^x+\cos(x)\cdot e^x+\sin(x)\cdot e^x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c.) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}1^\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left((1-x)^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\exp}_{\text{tauschen geht, da }\exp(\cdot)\text{ stetig ist}} \left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$

$= \exp\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}\right)}_{Typ\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}$

Denn: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{1-x} = -1$

3.3.3 KURVENDISKUSSION

PROBLEMSTELLUNG: Gegeben ist eine Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$.
Dann ist der Graph der Funktion definiert durch: $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in Db(f)\}$.
Dieser Graph ist zu untersuchen auf

a.) Nullstellen

b.) Stellen lokaler bzw. globaler Extrema

c.) Wendestellen

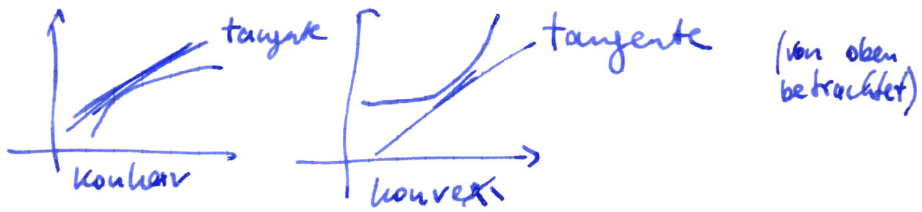
d.) Verhalten im Unendlichen, bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs $Db(f)$ und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen.

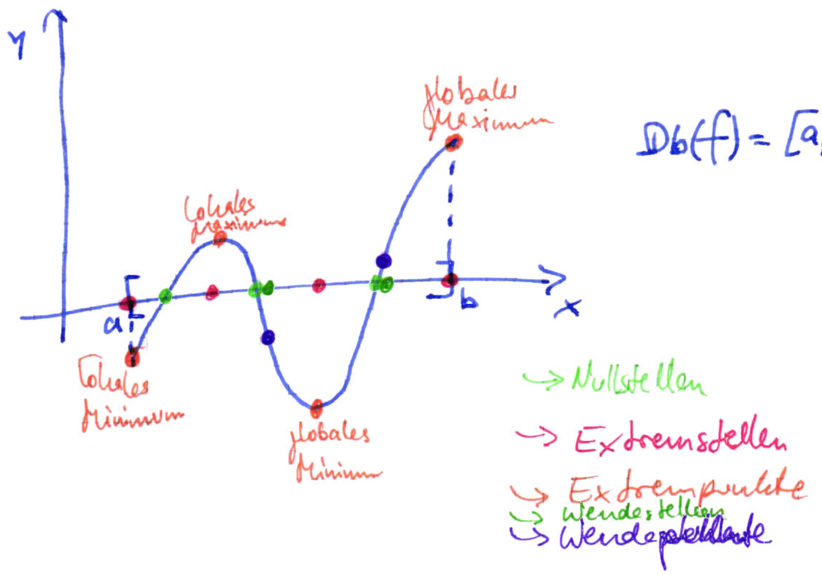
Diskussion:

(1) $x_0 \in Db(f)$ heißt NULLSTELLE n-TER ORDNUNG, falls
$f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^n(x_0) \neq 0$.
Zur Nullstellenbestimmung lernen wir bald das (iterative) Newton-Verfahren kennen.

(2) LOKALE EXTREMA sind extremal bzgl. einer Umgebung der Extremstelle.
GLOBALE EXTREMA sind extremal bzgl. des gesamten Definitionbereichs, sie sind lokale Extrem oder Funktionswerte in den Randpunkten.

(3) WENDEPUNKTE sind Punkte, an denen die Kurve von konkav in konvex oder von konvex in konkav übergeht.





(4) Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und der Ableitungen an der Stelle x_0 (f sei auf $U(x_0)$ hinreichend oft differenzierbar).

$f'(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 streng monoton fallend.
$f'(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.
$f'(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	f in x_0 lokal extremal.
$f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 konkav.
$f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in Umgebung von x_0 konvex.
$f''(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	x_0 Wendestelle.
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	f in x_0 lokal minimal
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	f in x_0 lokal maximal

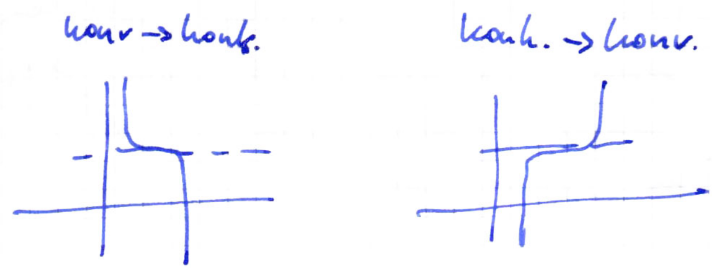
(5) Problem: $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$?
Extremstelle oder Wendestelle oder was?

HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR DAS VORLIEGEN VON EXTREMSTELLEN

Satz 4: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in Db(f)$ n-mal differenzierbare Funktion und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann gilt falls $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

a.) $n = 2, 4, 6, ...$ (also gerade), so ist x_0 lokale Extremstelle (Maximum falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).

b.) $n = 3, 5, 7, ...$ (also ungerade), so ist x_0 eine Horizontal-Wendestelle (konvex→konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$; konkav→konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).



Beweis mittels Taylor-Formal.
Oft ist auch folgendes Kriterium nützlich:

Satz 4': Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in Db(f)$, sowie $f'(x_0) = 0$. Dann:

a.) f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - \Rightarrow x_0 \text{ lokale Maximumstelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + \Rightarrow x_0 \text{ lokale Minimumstelle} \end{cases}$

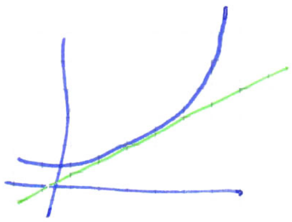
b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle

HINREICHENDE BEDINGUNG FÜR DAS VORLIEGEN EINER WENDESTELLE

Satz 5: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar an x_0 und $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann gilt falls $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und

a.) $n = 3, 5, 7, ... \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & konvex \Rightarrow konkav \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & kankav \Rightarrow konvex \end{cases}$

b.) $n = 4, 6, 8, ... \Rightarrow x_0$ keine Wendestelle, sondern sogenannte Flachstelle und Extremstelle, falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$.



Analog zu Satz 4 und 4' gibt es auch für Wendestellen ein alternatives hinreichendes Kriterium:

Satz 5': Es sei f eine 2 mal differenzierbare Funktion (in Umgebung von x_0), und es gelte $f''(x_0) = 0$. Dann:

a.) f'' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - : \text{(konvex} \to \text{konkav) Wendestelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + : \text{(konkav} \to \text{konvex) Wendestelle} \end{cases}$

b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ keine Wendestelle (sondern Flachstelle)

BEMERKUNG (zu Satz 4' und 5'):
Vorzeichenwechsel von f' bzw. f'' bei $x = x_0 \Leftrightarrow f'$ bzw. f'' hat bei x_0 Nullstelle ungerader Ordnung.

3.3.4 KURVENDARSTELLUNGEN, TANGENTEN- UND NORMALENGLEICHUNGEN, KRÜMMUNG

3.3.4.1 DARSTELLUNG EBENER KURVEN

(1) EXPLIZITE KARTHESISCHE DARSTELLUNGEN $y = f(x)$
Wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 3.3.3).

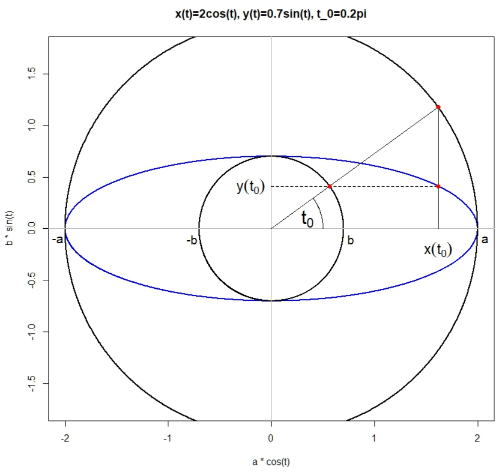
(2) IMPLIZITE KARTHESISCHE DARSTELLUNGEN $F(x, y) = 0$
Für graphische Darstellung ungünstig. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich $F(x, y) = 0$ auflösen nach y (oder x). Mehr dazu im Kapitel 5 (Differentialrechnung für Funktionen mehrer Veränderlicher).

(3) PARAMETER DARSTELLUNG $x = x(t), y = y(t), t \in I$ (kurz PD)
vektorielle Form: $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in I$

Bsp. 13:
$x = a \cos t$
$y = b \sin t$
$t \in [0, 2\pi) \quad a, b > 0$

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = a,\ y(0) = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$$
$$t = \pi \Rightarrow x(\pi) = -a,\ y(\pi) = 0$$

Dies ergibt eine Ellipse.

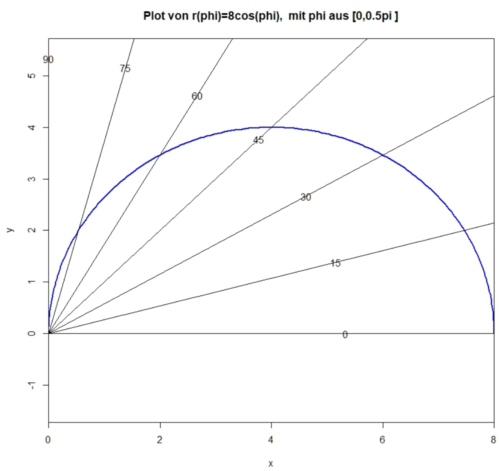


Übergang zur Parameterfreien Darstellung: t eleminieren.

$\frac{x}{a} = \cos t, \; \frac{y}{b} = \sin t$ | Quadrieren und Addieren

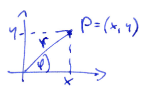
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Bsp. 14: Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius R.
PD bspw.: $x = x_0 + r\cos t \qquad y = y_0 + R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$
Parameterfreie Darstellung:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



(4) Explizite Darstellung in Polar-Koordinaten

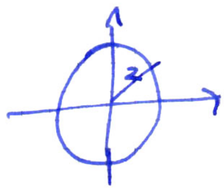
- Darstellung eines Punktes in der Ebene



x, y ... karthesische Koordinaten
r, φ ... Polarkoordinaten von P (analog Betrag und Argument einer komplexen Zahl)
$r \geq 0, \; \varphi \in \mathbb{R}$
Umrechnung:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

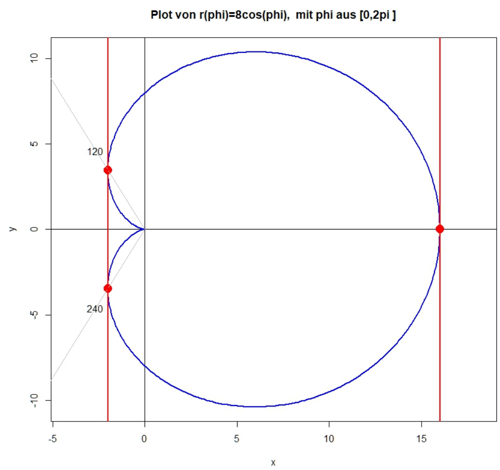
- Kurvendarstellung $r = r(\varphi) \quad , \varphi \in [\alpha, \beta]$
  Bsp.: $r(\varphi) = 2,\ \varphi \in [0, 2\pi)$



Für jeden Winkel $\varphi \in [\alpha, \beta]$ die Strecke $r(\varphi)$ auf den φ entsprechenden Strahl von 0 abtragen.

Bsp. 15: $\quad r = r(\varphi) = 8\cos\varphi \quad , \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

φ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
$8\cos\varphi$	8	$7,73$	$6,92$	$5,66$	4	$2,07$	0



Bemerkung

- Übergang „explizite Darstellung $\rightarrow$ Parameterdarstellung"
  $y = f(x),\ x \in [a, b]$
  $\Rightarrow x = t,\ y = f(t),\ t \in [a, b]$ (t als Parameter)
- Übergang „explizite Polardarstellung $\rightarrow$ Parameterdarstellung"
  $r = r(\varphi),\ \varphi \in [a, b]$
  $\Rightarrow x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in [a, b]$ (φ als Parameter)

Im Bsp. 15:

$$x = 8\cos^2\varphi$$
$$y = 8\cos\varphi\sin\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

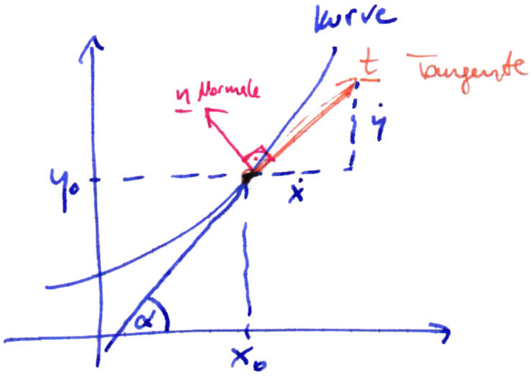
Parameterfreie Darstellung:

$$\begin{aligned}
y^2 &= 64 \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{x}{8}} \underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\frac{x}{8}} \\
&= x(8-x) \\
&\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0 \\
&\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4^2
\end{aligned}$$

(Halb-)Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(4,0)$.

3.3.4.2 TANGENTEN UND NORMALEN EBENER KURVEN

- Anstieg y' einer in PD gegebener Kurve $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$.
  Dazu sei $y = f(x)$ die explizite karthesiche Form (ohne die Elimination von t durchzuführen).
  $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{dt} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{dt}$ (Kettenregel)
  In Anwendungen in t oft die Zeit, üblicher Weise schreibt man dann:
  $\dfrac{\mathrm{d}x}{dt} =: \dot{x} \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{dt} =: \dot{y} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$
  $\dfrac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x} \ldots$
- Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, y_0),\ x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$



(Ein) Richtungsvektor der Tangente in x_0, y_0 ist gegeben durch $\underline{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$.

Für $\underline{n} = \underline{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $(\underline{t}, \underline{n}) = 0$. Also ist $\underline{n} \perp \underline{t}$ und $\underline{n}$ ist daher ein Richtungsvektor.

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$	$P_0 = (x_0, f(x_0))$	$P_0 = (x(t_0), y(t_0))$	$P_0 = (r(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0,\ r(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0$
Anstieg $m = \tan\alpha$ in P_0	$f'(x_0)$	$\dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\dfrac{r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0}{r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0}$
Tangentenvektor $\underline{t}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$
Normalenvektor $\underline{n}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 - r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

Tangentengleichungen:

$y = y_0 + m(x - x_0)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{t} \quad s \in \mathbb{R}$

Normalengleichungen:

$y = y_0 - \dfrac{1}{m}(x - x_0)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{n} \quad s \in \mathbb{R}$

Bsp. 16: Für welche Werte des Parameters φ ist die Tangente an die Kurve $r = r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi)$ parallel zur y-Achse?

Lösung: $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$ mit der Bedingung $r'(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow -a\sin\varphi\cos\varphi - a(1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi = 0$

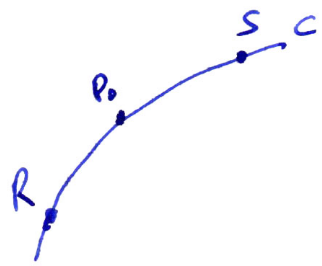
$\Rightarrow -a\sin\varphi(\cos\varphi + 1 + \cos\varphi) = 0$

$\Rightarrow \sin\varphi = 0 \vee \cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi_1 = 0°,\ \varphi_2 = 180°,\ \varphi_3 = 120°,\ \varphi_4 = 240°$

Allerdings entfällt φ_2, da $r'(\varphi_2)\sin\varphi_2 + r(\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0$

3.3.4.3 KRÜMMUNG EBENER KURVEN



Gegeben sei die Kurve C und der feste Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Außerdem sind zwei Punkte R und S auf der Kurve gegeben. Durch 3 Punkte $P_0,\ R$ und S im Allgemeinen eindeutig ein Kreis festgelegt.

Es sei K die Grenzlage dieses Kreises, wenn R und S in P_0 übergeben.

Es heißt dann:

$K\ldots$ Krümmungskreis (Schmiegkreis)
$\varkappa$ (Kappa)... Krümmung
$\varrho\ldots$ Krümmungsradius mit $\varrho = \dfrac{1}{|\varkappa|}$

$M\ldots$ Mittelpunkt des Krümmungskreises $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\varkappa} \cdot \dfrac{\underline{n}}{|\underline{n}|}$

Tabelle (Krümmungen)

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Krümmung $\varkappa$ in Punkt $P = (x, y)$	$\varkappa = \dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \dfrac{r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

Bsp. 17: In welchem Punkt ist $f(x) = e^x$ am stärksten gekrümmt (d.h. maximiere $|\varkappa|$)
Lösung: $y' = e^x + y''$

$$\varkappa = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = |\varkappa|$$

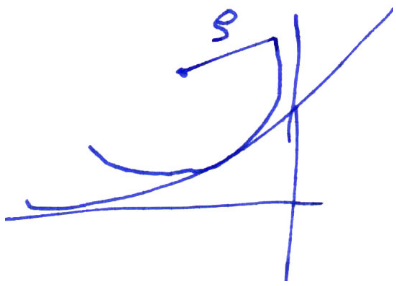
$$\frac{d|\varkappa|}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - e^x \cdot \frac{3}{2}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x(1+^{2x})^{\frac{1}{2}}}_{\neq 0}(1+e^{2x} - 3e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2 \qquad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

mit $\varkappa = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}},\ \varrho = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



3.3.4.4 RAUMKURVEN

- PARAMETERDARSTELLUNG $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I$

  vektorielle Form: $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in I,\ \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- TANGENTE IM PUNKT $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$

  mit $\underline{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix},\ \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $\underline{g}(s) = \underline{r}(t_0) + s \cdot \dot{\underline{r}}(t_0),\ s \in \mathbb{R}$ ist die Tangente im Punkt P_0.

- PHYSIKALISCHE DARSTELLUNG $\underline{r} = \underline{r}(t),\ t \in I \ldots$ Bewegung eines Massepunktes im Raum
  $\dot{\underline{r}}(t_0) \ldots$ Geschwindigkeit zur Zeit t_0
  $\ddot{\underline{r}}(t_0) \ldots$ Beschleunigung zur Zeit t_0
- KRÜMMUNG $\varkappa = \dfrac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$, Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{1}{\varkappa}$

Bsp. 18: (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix} \qquad t \geq 0,\ a > 0,\ h > 0 \ (h \text{ ist Abstand zwischen zwei Schraubenlinien})$$

Gesucht ist die Tangente in Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$ für $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Tangente: $\underline{g}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \qquad s \in R$

(da die y-Koordinate in $s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$ 0 ist: $\underline{g}$ ist parallel zur x-z-Ebene)

3.3.5 NEWTON-VERFAHREN ZUR NULLSTELLENBESTIMMUNG

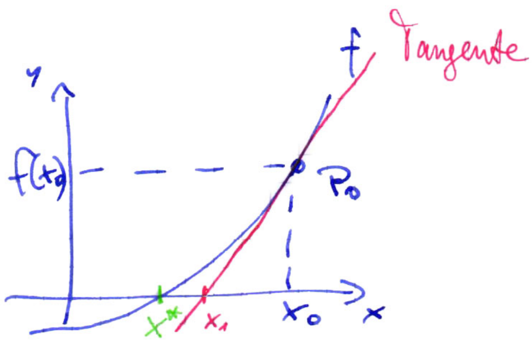
Satz 6: Es sei x^* eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für ein geeignetes Intervall $I = (x^* - r, x^* + r)$ gelte $f'(x) \neq 0$ und $\left|\dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq k < 1$ für alle $x \in I$.

Dann konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in I$ die mittels $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$ festgelegte Folge gegen x^*, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Außerdem gilt $|x^* - x_n| \leq \dfrac{k}{1-k}|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

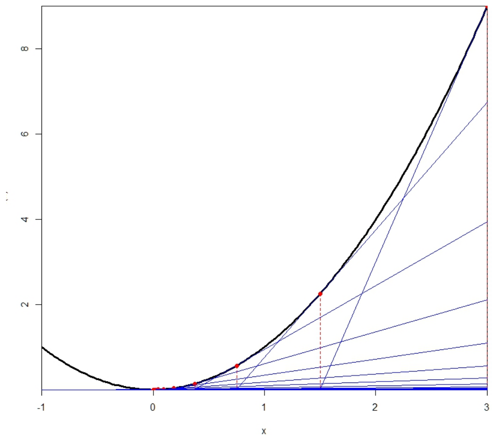
Diskussion:

- Geometrische Veranschaulichung:



Tangente in P_0 :
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$x_1 \ldots$ Nullstelle der Tangente

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



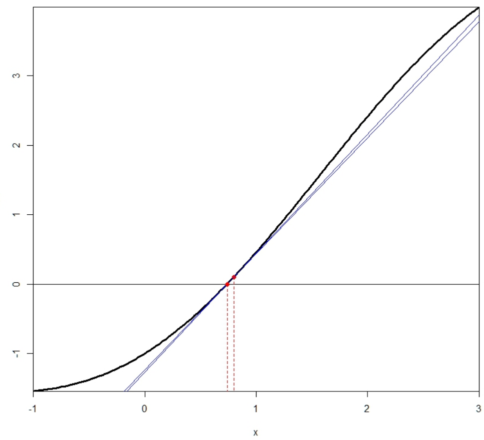
- Zur Wahl des Startwertes x_0:
  Falls in I gilt $f''(x) > 0$, dann ist ein x_0 mit $f(x_0) > 0$ günstig (bzw. bei $f''(x) <=$ ein $f(x_0) < 0$).
- Praktisches Vorgehen:
  Abbruch falls $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

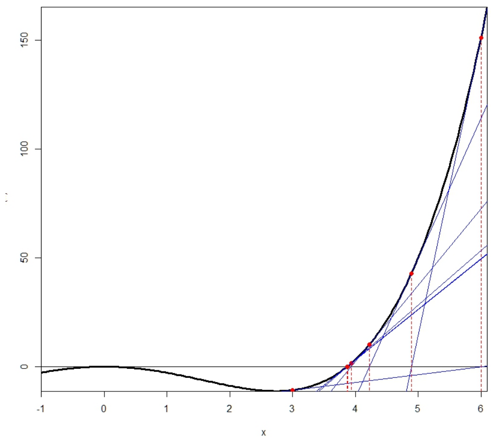
Bsp. 19: Gesucht sind Lösungen von $f(x) = \cos(x) = x \Leftrightarrow x - \cos(x) = 0$. Gesucht ist nun eine Nullstelle von f.
Start $x_0 = 0,8$ (nur ein Beispiel)

$$f'(x) = 1 + \sin(x)$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

n	x_n
0	$0,8$
1	$0,73985$
2	$0,73908526$
3	$0,73908513322$
4	$0,73908513322\ldots$

$\Rightarrow x^* = 0,739085$


-1
0
1
2
3
x
-1
0
1
2
3

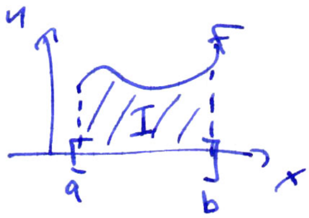

-1
0
1
2
3
4
5
6
x
0
50
100
150

4 INTEGRALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

4.1 DER INTEGRALBEGRIFF

4.1.1 DAS BESTIMMTE INTEGRAL

Problem:
GEGEBEN: Kurve $y = f(x),\ x \in [a, b]$ und $f(x) \geq 0$.
GESUCHT: Flächeninhalt I unter der Kurve

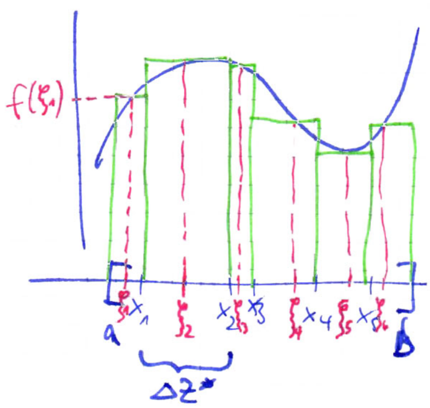


VORGEHEN:

- Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < n_n = b$
- In jedem Teilintervall Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{in}, x_i]$ wählen. Dies ergibt die Zerlegung Z^* (Z mit Zwischenstellen).
- $\Delta(Z^*) := \max\limits_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1} = \ldots$ Länge des größten Teilintervalls
- Approximation von I durch die Summe von Rechteckflächen:

$$S(Z^*, f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

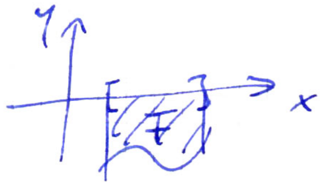
$S(Z^*, f)$ heißt Riemann-Summe. Sie ist abhängig von der Zerlegung Z^*.



Def. 1 Die Funtkion f heißt (Riemann-)integrierbar über $[a, b]$ falls für jede Zerlegungsfolge Z_μ^* von $[a, b]$ mit $\lim\limits_{\mu\to\infty} \Delta(Z_\mu^*) = 0$ gilt: $\lim\limits_{\mu\to\infty} S(Z_\mu^*, f) = I$. Die Zahl I heißt dann bestimmtes Integral von f über $[a, b]$. Bezeichnung: $i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Diskussion:

- Def. 1 basiert auf der Forderung $f(x) \geq 0$. Falls $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt im Falle der Integrierbarkeit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$:



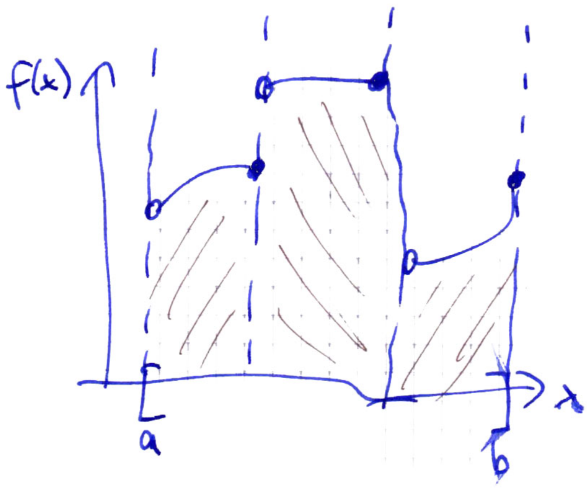
$\Rightarrow$ Flächeninhalt $F = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Man definiert:
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (b > a)$$
- Eigenschaften des bestimmten Integrals:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- $\int_a^b c_1 u(x) + c_2 v(x)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.

Diskussion:

- Falls f stückweise stetig ist, mit endlich vielen Sprungstellen, so ist f ebenfalls integrierbar (Integration von Sprungstelle zu Sprungstelle).



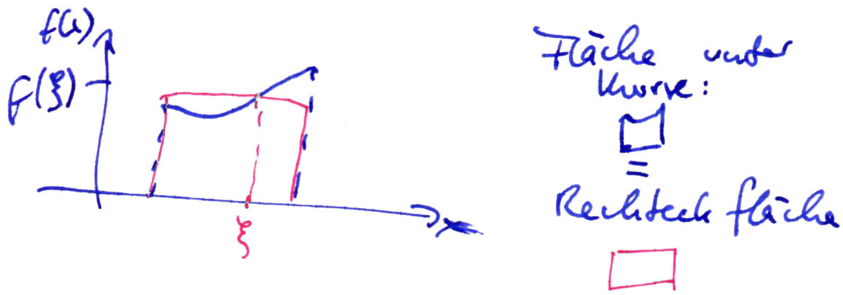
- Nicht integrierbar ist bspw. $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 0 & x \text{ rational} \end{cases}$

4.1.2 STAMMFUNKTION UND UNBESTIMMTES INTEGRAL

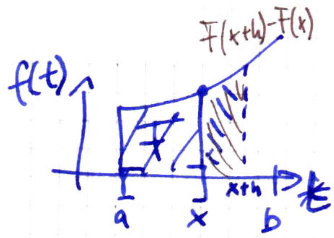
Satz 2: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Anschaulich:



Wir nennen $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ den Integralmittelwert von f auf $[a,b]$.
INTEGRAL MIT VARIABLER OBERER GRENZE:
Wir betrachten $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =: F(x)$



Satz 3: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Beweis:
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \overset{\text{Satz 2}}{\underset{(\text{mit } \xi\in(x,x+h))}{=}} \frac{f(\xi)\cdot(x+h-x)}{h} = f(\xi) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x) \text{ da } f \text{ stetig.}$$
$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Def. 2: Die Funktion F heißt STAMMFUNKTION von f (auf $[a,b]$), wenn gilt $F'(x) = f(x)$.

Diskussion: Ist F eine Stammfunktion, so ist auch $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion.

Def. 3: Die Menge $\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}$ aller Stammfunktionen von f, wobei F beliebige Stammfunktion von f ist, heißt unbestimmtes Integral von f.
Bezeichunung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

4.1.3 HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG (HDI)

Satz 4: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F beliebige Stammfunktion von f.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beweis: Satz 3 liefert $F_1(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist Stammfunktion von f. Also gilt $F(x) = F_1(x) + k$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_1(b) + k - \underbrace{F_1(a)}_{=0} - k = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Diskussion:

(1) $\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{Flächeninhaltsproblem,}\\ \text{Integralrechnung}}} \quad = \quad \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\text{Stammfunktion,}\\ \text{Umkehrung der Differentialrechnung}}}$

Dieser Term ist also der Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung.

(2) Symbolik: $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int \mathrm{d}F(x)}_{F(x)+C} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

(3) Aus Tabellen zur Differentiation lassen sich Integrationsregeln ableiten.

Beispiele:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$

$\Leftrightarrow \int -\sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C^* \quad | \cdot (-1)$

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \underbrace{C}_{=-C^*}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\alpha+1} = (\alpha + 1)x^{\alpha}$

$\Leftrightarrow \int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$ (falls $\alpha \neq -1$)

4.2 INTEGRATIONSMETHODEN

4.2.1 SUBSTITUTION

Zu berechnen ist $\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$. Bekannt sei dabei die Stammfunktion F von f. Dann gilt:

$$\int f\big(g(x)\big) g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Subst.}\\ u=g(x)}}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C \overset{u=g(x)}{=} F\big(g(x)\big) + C$$

Substitution $u = g(x)$ impliziert $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$.

MERKE: Anwendung dieser Methode ist zweckmäßig, wenn der Integrand das Produkt eine Verknüpfung zweier Funktionen mit der Ableitung der inneren Funktion ist und eine Stammfunktion für die äußere Funktion bekannt ist.

Bsp. 1: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\ln x}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=\ln x\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{x}\mathrm{d}u}}{=} \int \underbrace{\sqrt[3]{u}}_{u^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(\ln x)^{\frac{4}{3}} + C$

Bsp. 2: $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=-x^2\\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{2x}}}{=} \int xe^u \frac{\mathrm{d}u}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Bsp. 3: (Substitution bei bestimmten Integral)

- 1. Variante: Grenzen ersetzen
  $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=1+x^2\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{2x}}}{=} \int_1^9 x\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$
  Grenzen in Substitution einsetzen $u = 1 + x^2 \Rightarrow u_{unt} = 1 + 0^2 = 1 \quad u_{ob} = 1 + \sqrt{8}^2 = 9$
- 2. Variante: Erst unbestimmtes Integral lösen
  $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
  Dann Grenzen einsetzen:
  $\displaystyle I = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

Bsp. 4: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

(Zähler = Ableitung des Nenners)

Nutze dazu die Substitution $u = f(x),\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$

$\displaystyle\Rightarrow \int \cdots = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$

Bsp. 5: (lineare Substitution)

Allgemein: $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=ax+b\\ \frac{du}{dx}=a}}{=} \int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} \overset{\substack{F\text{: Stammfkt.}\\ \text{von } f}}{=} \frac{1}{a}\cdot F(u) + C$

(a) $\displaystyle\int \cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$

(b) $\displaystyle\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2}e^{-2x} + C$

(c) $\displaystyle\int (3x+4)^6\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}(3x+4)^7 + C$

(d) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\,\mathrm{d}x = 2\cdot -\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) + C$

Diskussion: Neben diesen „natürlichen“ und leicht erkennbaren Substitutionen sind weiter Substitutionen durch die Einführung von „künstlichen“ Variablen möglich:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{x=f(t)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}(t)}}{=} \int f(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$$

Dies entsprecht der Substitutionsregel, von rechts nach links gelesen. Falls die rechte Seite davon integrierbar ist (mit Stammfunktion H), dann:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)+C = H\big(\varphi^{-1}(t)\big)+C \qquad \text{(falls } \varphi^{-1} \text{ existiert)}$$

Bsp. 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{x=\sinh(t)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cosh(t)\\ \cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1}}{=} \int \frac{1}{\cosh(t)}\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t+C = \operatorname{arcsinh}(x)+C$$

Für weitere geeignete Substitutionen siehe Integrationstabelle.

4.2.2 PARTIELLE INTEGRATION

Produktregel der Differentiation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)\cdot v(x)\big) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow u(x)v(x) \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$$

Bsp. 7:

(a) $\displaystyle\int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(2x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

$u'(x)=1 \qquad v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

(b) $\displaystyle\int \underbrace{x^3}_{v'}\underbrace{\ln x}_{u} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C = \frac{1}{4}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + +C$

MERKE: Typische Anwendungsfälle für partielle Integration (mit $p(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$
- $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$
- $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$

aber (mit $\ln(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int x^{\alpha}\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Bsp. 8:

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=\arctan(x)\\ v'\equiv 1}}{=} x\cdot\arctan(x) - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C$$

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \qquad v = x$$

4.2.3 INTEGRATION GEBROCHEN RATIONALER FUNKTIONEN

Gegeben: Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Integration erfolgt in 5 Schritten:

(1) Falls f unecht gebrochen: Polynomdivision erhalten dann $f(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\dfrac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}}$

(2) Nullstellen von q ermitteln. Dann Zerlegung q:
$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\dots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\dots$
k_i: reelle Nullstellen $\qquad m_i$: nicht reell zerlegbar
Dabei kürzt man eventuelle gemeinsame Faktoren in r und q heraus.

(3) ANSATZ FÜR DIE PARTIALBRUCHZERLEGUNG
$\dfrac{r(x)}{q(x)}$ =Summe von Partialbrüchen

Jeden Faktor der Form $\begin{cases}(x-\alpha)^k\\ (x^2+px+q)^m\end{cases}$ der Gleichung entspricht der Anteil

$\begin{cases}\dfrac{A_1}{x-\alpha}+\dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\dfrac{A_2}{(x-\alpha)^k}\\ \dfrac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\dfrac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}\end{cases}$ in dieser Summe.

Bsp. 9:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+4}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+5}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+2}+\frac{Gx+H}{(x^2+2x+2)^2}\end{aligned}$$

Beachte: x^2+2x+2 ist reell nicht weiter zerlegbar, Nullstelle: $1\pm i$.

(4) Ermittlung der Koeffizienten durch
- Multiplikation des Ansatzes der Partialbruchzerlegung mit $q(x)$
- Kombination der folgenden beiden Methoden
  (a) Einsetzen der reellen Nullstellen
  (b) Koeffizientenvergleich

  (falls q nur reelle Nullstellen hat, recht Methode a.)

(5) Integration der Partialbrüche

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-\alpha)^j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\ln(|x-\alpha|)+C & j=1\\ \dfrac{1}{1-j}(x-\alpha)^{1-j}+C & j=2,3,4,\dots\end{cases}$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x+C}{(x^2+px+q)^j}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+q)}{(x^2+px+q)^j} + \frac{C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^j}\,\mathrm{d}x$

- $\displaystyle\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^2}\,\mathrm{d}x$: Nutze Substitution.
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+px+q)^j} \overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^j}\,\mathrm{d}x \overset{u=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{1}{(u^2+a^2)^j}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{cases} j=1 & \text{Stammfunktion siehe Merkblatt} \\ j>1 & \text{siehe weitere Formelsammlung (selten)} \end{cases}$$

Bsp. 10: $\displaystyle I = \int \frac{3x+4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$

- echt gebrochen
- Nullstellen des Nenners: $x_1=-3,\ x_2=1$
  $\Rightarrow x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

Ansatz für PBZ:

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{(x+3)(x-1)} &= \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1} \qquad \mid \cdot (x+3)(x-1) \\ 3x+4 &= A(x-1)+B(x+3) \end{aligned}$$

Einsetzen der NS:

$x_1: \quad -5 = A\cdot(-4) \Rightarrow A=\frac{5}{4}$

$x_2: \quad 7 = B\cdot 4 \Rightarrow B=\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{\frac{5}{4}}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{7}{4}}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{4}\ln(|x+3|)+\frac{7}{4}\ln(|x-1|)+C \end{aligned}$$

Bsp. 11: $\displaystyle I = \int \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,\mathrm{d}x$

- echt gebrochen
- Nenner reell nicht weiter zerlegbar (denn Nullstellen von $x^2-4x+13$ sind $x_{1/2}=2\pm 3i$)
- Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+13} \qquad \mid \cdot \text{Nenner} \\ 7x^2-10x+37 &= A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1) \\ &= (A+B)x^2+(-4A+B+C)x+(13A+C) \end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstelle $x=-1$: $\quad 54=18A \quad \Rightarrow A=3$

Koeffizientenvergleich x^2: $\quad 7=A+B \quad \Rightarrow B=4$

x^0 $\quad 13A+C) \quad \Rightarrow C=-2$

$$\Rightarrow \int \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\frac{3}{x+1}}_{a} + \underbrace{\frac{4x-2}{x^2-4x+13}}_{b}\,\mathrm{d}x$$

$$a: \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+1| + C_1$$
$$b: \int \frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2x-4)-2+8}{x^2-4x+13} = 2\underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}}_{I_1} + \underbrace{\frac{6}{x^2-4x+13}}_{I_2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst.}}{=} \ln|x^2-4x+13| + C_2$$
$$I_2 = 6\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+9} = 6\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3^2} = 6\cdot\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C_3 = 2\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_3$$

$$\Rightarrow I = 3\ln|x+1| + 2\ln\left(x^2-4x+13\right) + 2\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_4$$

4.2.4 INTEGRATION VON POTENZREIHEN

Satz 1: Es sei $f:(x_0-r, x_0+r)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ die Grenzfunktion der Potenzreihe (mit Konvergenzradius r). Dann ist $F:(x_0-r,x_0+r)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion von f (gliedweises Integrieren im Konvergenzintervall).

Bsp. 12:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad |x|<1$ (siehe Übung, nutze geometrische Reihe)

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_1$

Wir wissen aber auch: $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C_2$

$\Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_3$ mit $C_3 = 0$ (setze $x=0$ ein) und $|x|<1$.

Bsp. 13: Gesucht ist Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} - \frac{(t^2)^3}{3!} + \dots\right)\mathrm{d}t$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \cdots \quad (x\in\mathbb{R})$$

Diskussion:

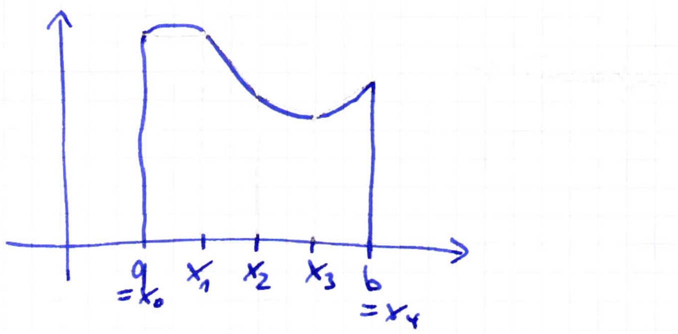
- $\int e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ nicht geschlossen auswertbar.
- Für nicht zu große x ist die Reihendarstellung zur Auswertung von F gut geeignet.
  z.B. $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 8!}}_{0{,}746824\cdots} - \dots$

  |Fehler| $< \frac{1}{19\cdot 9!} = 1{,}4504\cdot 10^{-7}$ (vgl. Satz über Leibnitz-Kriterium)

4.3 NUMERISCHE INTEGRATION

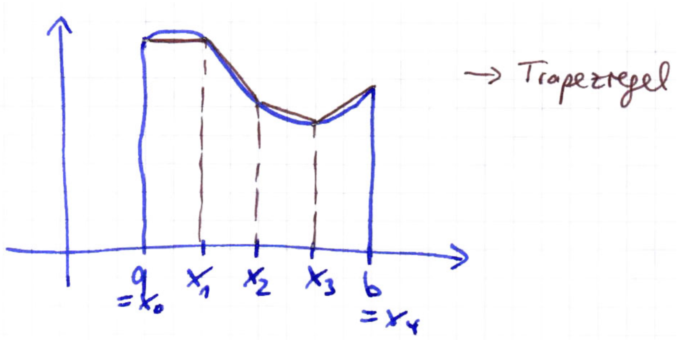
ZIEL: Berechne $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ falls Stammfunktion „kompliziert“ oder nicht elementar angebbar.
PRINZIP:

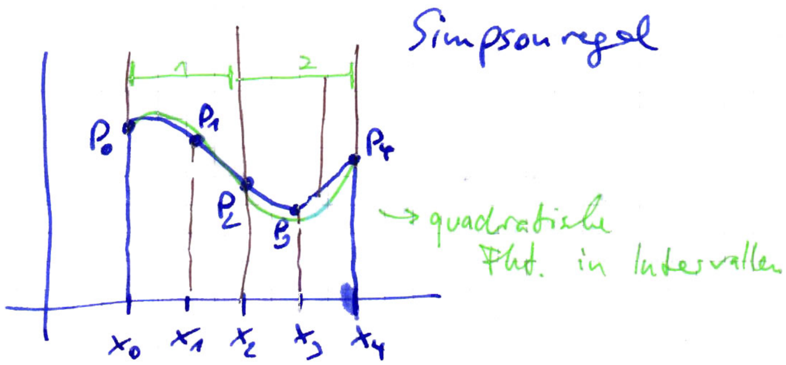
(a) Zerlegung von $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}(b-a)$
$\Rightarrow$ Teilpunkte sind $x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$, $y_k = f(x_k)$



(b) Ersetze $f(x)$ über den Teilintervallen durch einfachere Funktionen.
z.B.:

- lineare Funktionen $\rightsquigarrow$ Trapez Regel
- quadratische Funktionen $\rightsquigarrow$ SIMPSON-Regel





Parabeln durch:

1: P_0, P_1, P_2

2: P_2, P_3, P_4

Als Näherung für I ergibt sich für die Simpson-Regel:

$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right)$
falls n gerade ist.

Diskussion:

(1) Fehlerabschätzung:
$I = S_n(h) - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \quad a < \xi < b$
(falls $f^{(4)}$ stetig in $[a, b]$)

(2) Simpson-Regel ist für Polynome einschließlich Grad 3 exakt.

(3) Praktische Durchführung: Schrittweitenhalbierung
Startwert: $S^{(1)} = S_n(h)$ für geeignetes h. $S^{(2)} = S_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$, $S^{(3)} = S_{4n}\left(\frac{h}{4}\right)$, usw. bis sich die Ziffern in gewünschter Genauigkeit nicht mehr ändern.

Bsp.: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
$n = 4,\ h = 0,25$

k	x_k	y_0, y_n	y_{2j+1}	y_{2j}
0	0	1		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

$S_4(0,25) = \frac{0,25}{3}(1,367879 + 4 \cdot 1,509196 + 2 \cdot 0,778801)$

4.4 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

- Vorbetrachtung:
  Bisher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wobei $[a, b]$ endliches Integral auf f stückweise stetig auf $[a, b]$ (daher beschränkt)
- 2 Erweiterungen:
  (1) unendliches Intervall $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ oder $(-\infty, \infty)$
  (2) Funktion f unbeschränkt (Unendlichkeits- bzw. Polstellen)

Unendliches Intervall (zu 1.)

(a) $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to\infty} \int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x$
analog:
$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ (bspw. $c = 0$).

Diskussion:

(1) Falls die Grenzwerte existieren, so heißt das Integral konvergent, sonst divergent.

(2) Ein berühmtes Beispiel ist die Γ-Funktion:
$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0)$
Eigenschaft: $\Gamma(n) = (n-1)!$ falls $n \in \mathbb{N}$

Bsp. 1:

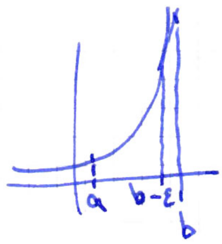
(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x} \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(-e^{-A} + e^0\right) = 1$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} [\sin(x)]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(\sin A - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right)$
Grenzwert existiert nicht $\Rightarrow$ Integral unbestimmt divergent.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} [\ln|x|]_1^A = \lim_{A\to\infty} \left(\ln A - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \infty$
$\Rightarrow$ bestimmt divergent

Unbeschränkter Integrand (zu 2.)

(a) bspw. Unendlichkeitsstellen bei b:
$\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x$



(b) falls Unendlichkeitsstelle x_0 im Inneren von $[a, b]$ liegt:
$\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x) \, \mathrm{d}x$
... und nutzen nun a.):
$\displaystyle\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) \, \mathrm{d}x$

Bsp. 2:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 4$$

Unendliches Intervall und unbeschränkter Integrand (Kombination von 1. und 2.)

Bsp. 3

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

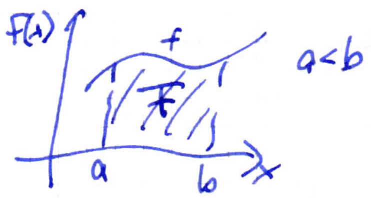
mit $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \underbrace{\ldots}_{\text{Subst. } t=\sqrt{x-1}} = 2\arctan\sqrt{x-1}+C$:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} + \lim_{a\to\infty}\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^2 + \lim_{A\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_2^A\\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0}(2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{\varepsilon}) + \lim_{A\to\infty}(2\arctan\sqrt{A-1}-2\arctan 1)\\
&= \underbrace{\lim_{A\to\infty} 2\arctan\sqrt{A-1}}_{\pi} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\searrow} 2\arctan\sqrt{\varepsilon}}_{0}\\
&= \pi
\end{aligned}$$

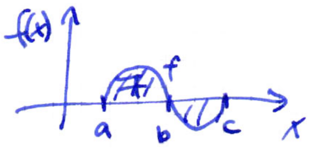
4.5 ANWENDUNGEN

4.5.1 GEOMETRISCHE ANWENDUNGEN

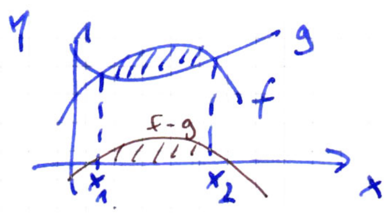
4.5.1.1 INHALTE EBENER FLÄCHEN

- 

mit $a<b$ und $f(x)\geq 0$:
$$F=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

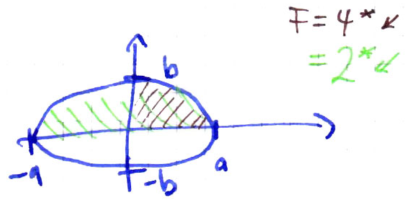
- 

mit $a<b<c$:
$$F=\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 

mit $f(x)$: obere Funktion und $g(x)$: untere Funktion:
$$F=\int_{x_1}^{x_2} f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$$

Bsp. 1: Gesucht ist der Flächeninhalt F des von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ begrenzten Bereichs.

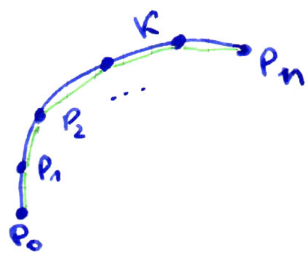


$y = \pm b\sqrt{a - \frac{x^2}{a2}}$

$$F = 4 \cdot \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a}}\,\mathrm{d}x = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Subst.}\\ x=a\sin t}}{=} \frac{4b}{a}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= \frac{4b}{a}\frac{1}{2}a^2 \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot ab$$

4.5.1.2 BOGENLÄNGE

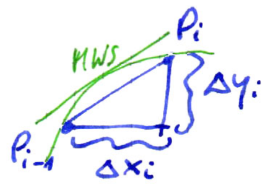
Bogenlänge ebener Kurven



Kurve K mit Parameterdarstellung. $x = x(t) \quad y = y(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

- Vorgehen: Approximieren durch Streckenzug, dann Verfeinerung

  Länge des Streckenzugs: $\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

  $\Rightarrow$ (Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(u_i))^2 + (\dot{y}(v_i))^2} \cdot \Delta t_i$

  mit $u_i, v_i \in (t_{i-1}, t_i)$
  Verfeinerung:
  $\int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$

Diskussion:

- Bogenlänge der Kurve $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zwischen α und t ist

$$s = \int_\alpha^t \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2}}_{|\dot{r}(u)|}\,\mathrm{d}u =: f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = |\dot{r}(t)| \Rightarrow \mathrm{d}s = |\dot{r}(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$ (heißt Bogenelement)

- Tabelle (Bogenlänge ebener Kurven)

Kurvendarstellung	Bogenlänge s, Bogenelement $\mathrm{d}s$
$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}$
$y = f(x),\ x \in [a, b]$	$s = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s}$
$x = g(y),\ y \in [c, d]$	$s = \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}s}$
$r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}s}$

Bogenlänge von Raumkurven
Gegeben sei Kurve Kmit Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$.
Die Bogenlänge berechnet sich dann mittels

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

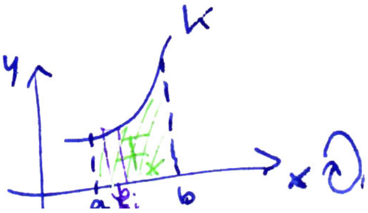
Bsp. 2 (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t}_{a^2} + \frac{h^2}{(2\pi)^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \end{aligned}$$

4.5.1.3 VOLUMEN VON ROTATIONSKÖRPERN



(a) Gegeben:

- Kurve K mit $y = f(x),\ x \in [a, b]$
- Das Flächenstück F_x zwischen Kurve und x-Achse rotiere um die x-Achse.

Gesucht:

- Volumen V_x des dabei erzeugten Körpers

Es gilt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$

(Idee: Approximation von F_x durch Rechteckflächen
$\overset{Rotation}{\rightsquigarrow}$ Zylinderscheiben $V_\alpha \approx \sum_i \pi (f(\xi_i))^2 \Delta x_i$

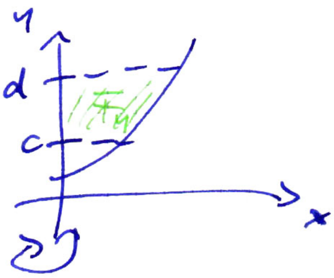
Grenzübergang: $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$)

Diskussion:

a) Allgemein gilt $V_x = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x \quad (a < b)$

b) Falls K in Parameterform gegeben $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha ... t ... \beta$, dann ergibt sich $V_x = \pi \int_\alpha^\beta (y(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{x}(t) \,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$, wobei ... (die Orientierung) so zu wählen ist, dass $a := x(\alpha) < x(\beta) = b$ gilt. Unter Umständen kann $\alpha < \beta$ sein.

(b) Gegeben: Kurve $x = g(y),\ y \in [c, d]$



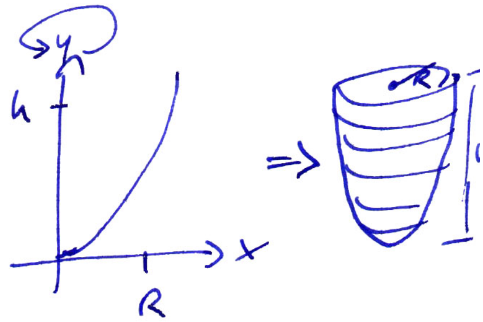
Gesucht: Volumen V_y bei Rotation von F_y um y-Achse.

$V_y = \pi \int_c^d x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_c^d (g(y))^2 \,\mathrm{d}y$

Für Parameterdarstellung:

$V_y = \pi \int_\alpha^\beta (x(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{y}(t) \,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}y}$, wobei $c = y(\alpha) < y(\beta) = d$

Bsp. 3: Gesucht ist das Volumen eines Rotationsparaboloids der Höhe h und mit Basisradius R.

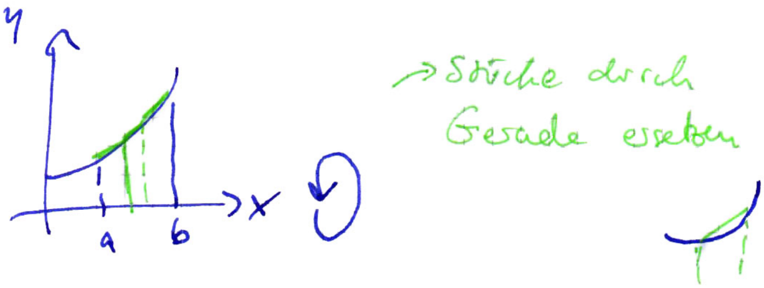


Kurve: $y = ax^2,\ h = aR^2 \Rightarrow a = \dfrac{h}{R^2}$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^h \frac{y}{a} \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} y \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h y \,\mathrm{d}y = \frac{\pi R^2}{h} \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{\pi R^2 h}{2} \end{aligned}$$

4.5.1.4 MANTELFLÄCHEN VON ROTATIONSKÖRPERN

(a) Gegeben: Kurve K mit $y = f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$
Gesucht: Die von der Kurve K, bei Rotation um x-Achse erzeugte Rotationsfläche M_x.

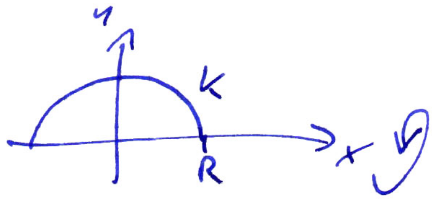


$M_x = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$
(Approximation der Kurve K durch Polygonzug
$\overset{Rotation}{\rightsquigarrow}$ Kegelstumpffläche
$M_x \approx \displaystyle\sum_i 2\pi f(\xi_i) \Delta s_i$
$\to 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s}$ (Bogenelement))
Allgemein gilt: $M_x = 2\pi \displaystyle\int_a^b y \,\mathrm{d}s$

(b) Gegeben: Kurve $x = g(y) \geq 0,\ y \in [c, d]$
Gesucht: Mantelfläche bei Rotation um die y-Achse.
$M_y = 2\pi \displaystyle\int_K x \,\mathrm{d}s = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2} \,\mathrm{d}y$

Für Parameterdarstellung:
$M_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$ mit $\alpha \le t \le \beta$

Bsp. 4: Kugeloberfläche

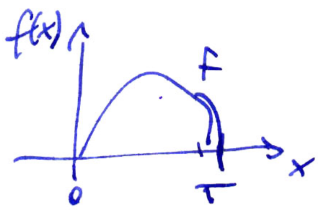


Halbkreis K soll um x-Achse rotiert werden.
$x = R \cdot \cos t$
$y = R \cdot \sin t$
$t \in [0, \pi]$
$\dot{x}(t) = -R\sin t \qquad \dot{y}(t) = R\cos t$

$$\begin{aligned} M_x &= 2\pi \int_K y\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^{\pi} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} R\sin t \cdot R\,\mathrm{d}t = 2\pi R^2 \left[-\cos t\right]_0^{\pi} \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

4.5.1.5 FOURIER-REIHEN

Gegeben: Funktion $f(x),\ x \in [0, T]$



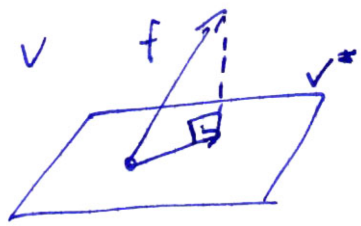
Gesucht: Reihendarstellung mit trigonometrischen Funktionen der Periode $T,\ \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$
d.h. (mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$):
$\cos(\omega x),\ \cos(2\omega x),\ \cos(3\omega x), \ldots$
$\sin(\omega x),\ \sin(2\omega x),\ \sin(3\omega x), \ldots$
Ansatz ist daher:
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{a} (a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x))$, wobei die Koeffizienten $a_k,\ b_k,\ k \ge 0$ zu ermitteln sind.
Motivation ist: Approximation von f zum Zwecke der Speicherplatzreduzierung (Abgespeichert werden i.A. nur wenige der Koeffizienten a_k und b_k. Das gilt auch dann, wenn f in diskreter Form vorliegt, d.h. in Form von Messwerten y_k an vielen Messstellen x_k.)
Vorgehensweise:

(1) Betrachte zunächst die endliche Reihe $f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)$.

Ziel ist: a_k und b_k so wählen, dass f_n möglichst gute Approximation von f ist.

(2) Approximation in Vektorräumen mit Skalarprodukt

- Es sei V ein Vektorraum. Das Skalarprodukt (f,g) ist eine Abbildung von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
  (a) $(f,f) > 0$ für alle $f \neq 0$
  (b) $(f,g) = (g,f)$ für alle $f,g \in V$ (Symmetrie)
  (c) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g.h.)$ für $f,g,h \in V,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (Linearität)
- Die Norm von f (oder Betrag von f) ist $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$ für $f \in V$
- f und g orthogonal $:\Leftrightarrow (f,g) = 0$
- Beispiele:
  (a) $V = \mathbb{R}^n,\ (\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
  (b) $C(a,b)\ldots$ Menge der auf $[a,b]$ stetigen reellwertigen Funktionen mit Skalarprodukt: $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
- Aufgabe: Approximation von $f \in V$ durch $f^* \in V^*$ wobei $V^* \subseteq V$ ein m-dimensionaler Unterraum ist, mit orthogonaler Basis $e_1,\ldots,e_m$ (d.h. $(e_i,e_j) = 0$ falls $i \neq j$). Gesucht ist also dasjenige $f^* \in V^*$, für welches $\|f - f^*\|$ minimal wird.



d.h. f^* ist die orthogonale Projektion von f auf V^*

Satz 1: Die orthogonale Projektion f^* von f auf V^* ist gegeben durch: $f^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, wobei $\alpha_i = \frac{(f,e_i)}{(e_i,e_i)},\ i = 1,..,n$

(3) Übertragung auf $C(O,T),\ T = \frac{2\pi}{\omega} \to \omega = \frac{2\pi}{T}$

- Man kann zeigen, dass die Funktion
  $\underbrace{1}_{g_0},\ \underbrace{\cos(\omega x)}_{g_1},\ \underbrace{\cos(2\omega x)}_{g_2},\ \cos(2\omega x),\ \ldots,\ \underbrace{\sin(\omega x)}_{h_1},\ \underbrace{\sin(2\omega x)}_{h_2},\ \sin(2\omega x),\ \ldots$
  in $C(O,T)$ orthogonal sind.
  z.B. $(g_0,g_1) = \int_0^T 1 \cdot \cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^T = 0$
- Außerdem gilt $(g_0,g_0) = T,\ (g_k,g_k) = \frac{T}{2} = (h_k,h_k)$ mit $k \in \mathbb{N}$

(4) Damit ergibt die Projektion von $f \in C(0,T)$ in $V^* = L(g_0,g_1,\ldots,g_n,h_1,\ldots,h_n)$ folgende Koeffizienten:
$a_k = \frac{(f,g_k)}{(g_k,g_k)} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x$

$b_k = \dfrac{(f, h_k)}{(h_k, h_k)} = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(x) \sin(k\omega x)\, \mathrm{d}x$
(bei der Approximation in der Ausgangsgleichung f_n)

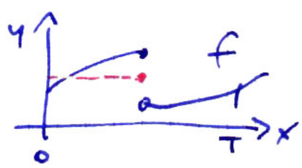
(5) Frage: $f_n \to f$ falls $n \to \infty$?

Satz 2: Seien f und f' auf $[0, T]$ stückweise stetig mit höchstens endlich vielen, endlichen Sprungquellen, dann gilt an allen Stetigkeitsstellen von f:

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))}_{\lim_{n\to\infty} f_n(x)} \text{ mit}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, \mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(k\omega x)\, \mathrm{d}x,$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(k\omega x)\, \mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Für die Sprungstellen x_S gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_S) = \dfrac{1}{2} \left(\lim\limits_{x \nearrow x_s} f(x) + \lim\limits_{x \searrow x_S} f(x) \right)$

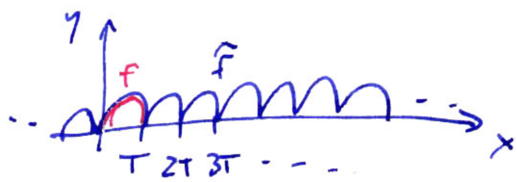


→ geht gegen die Mitte des Sprungstellen

Also: Ja, $f_n \to f$ falls $n \to \infty$.

Bemerkung:

a) Die Vorstehenden Ausführungen gelten automatisch für die periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ einer zunächst auf $[0, T]$ definierten Funktion f



b) Im Fall der periodischen Fortsetzung kann das Integrationsintervall $[0, T]$ durch beliebiges Intervall der Länge T ersetzt werden, z.B. $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$

c) Ist f symmetrisch gilt (vereinfachend):

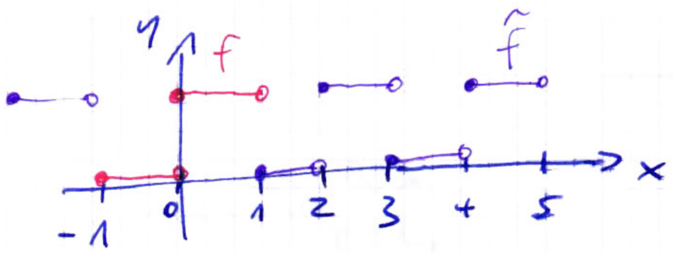
f gerade	$a_0 = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x$, $a_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(k\omega x)\, \mathrm{d}x$, $b_k = 0$
f ungerade	$a_0 = 0$, $a_k = 0$, $b_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(k\omega x)\, \mathrm{d}x$

d) Amplitudenspektrum
$A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$
. . . Amplituden der Schwingungen, die sich durch Zusammenfassung der Sinus- und Cosinusanteile gleicher Frequenz ergeben.
(Möglichkeit der Verstärkung/Dämpfung der Schwingung)

Die Fourier Reihe lässt sich mit diesem A_k auf folgende Form bringen:

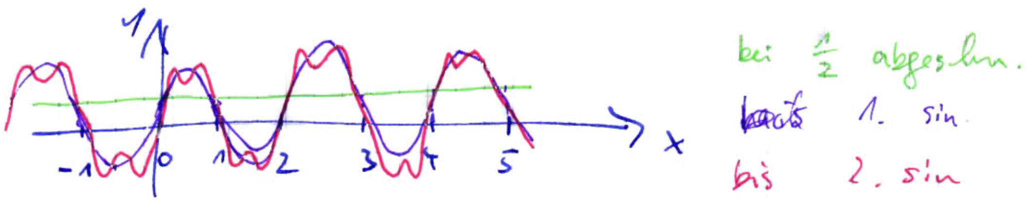
$f(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx - \varphi_k)$ mit $A_0 = a_0$ und $\varphi_k = \arccos\left(\dfrac{a_k}{A_k}\right) \quad k \geq 1$

Bsp. 6: $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $\tilde{f}$ periodische Fortsetzung

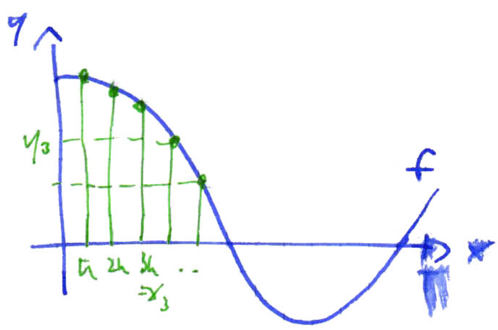


Gesucht: Fourier Reihe zu f mit $T = 2,\ \omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$$
$$a_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(k\pi x) = \frac{1}{k\pi}\left[\sin(k\pi x)\right]_0^1 = 0$$
$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k\pi}\left[\cos(k\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi}(cos(k\pi) - 1)$$
$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{k\pi} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$
$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \dots\right) \qquad x \in RR \setminus \mathbb{Z}$$



Diskreter Fall: Gegeben $y = f(x),\ x \in [0, T]$ ausgewertet (gemessen) an N Messstellen (wobei N gerade) z.B. Messung alle $\frac{1}{100}\mathrm{sec}$ = Samplingrate $100\ \mathrm{Hz}$ (bei Audio CDs $44,1\ \mathrm{kHz}$



$x_j = j \cdot h = j \cdot \dfrac{T}{N}$ für $j = 0, \dots, N-1$

$y_j = f(x_j)$

- Mit Ansatz von stetigen Funktionen für $n \leq \frac{N}{2}$ führt im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ mittels Satz 1 auf:

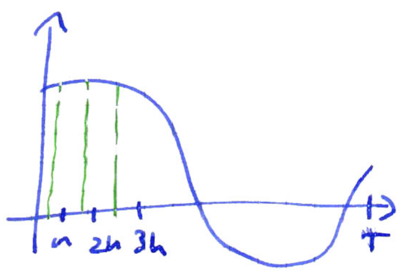
$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j,$$
$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \cos(k\omega x_j),$$
$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \sin(k\omega x_j)$$

- Im Fall $2n = N$ ergibt sich keine Approximation, sondern eine exakte Darstellung des Vektors $\underline{y} = (y_j)_{j=0}^{N-1}$ mit einer anderen Basis.
Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ lässt sich der Ansatz mit komplexen Koeffizienten c_k umschreiben:
$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega kx}$ und damit $y_j = f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c - ke^{i\frac{2\pi}{N} j\cdot k} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$
In Matrix-Schreibweise:
Sei $w := e^{i\frac{2\pi}{N}} s$ (eine von N Lösungen der Kreisgleichung $Z^N = 1$)
$\underline{F} = \left(w^{jk}\right)_{j,k=0}^{N-1}$
$\Rightarrow \underline{y} = \underline{F}\,\underline{c}$ (inverse diskrete Fourier Transformation IDFT)

- Man kann zeigen, dass $\underline{F}$ regulär ist mit $\underline{F}^{-1} = \frac{1}{N} F^*$, wobei $F^* = \left(\overline{w}^{kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}$ und $\overline{w} = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ (konjugiert komplex). Damit $\underline{c} = \frac{1}{N} F^* \underline{y}$. D.h. $\boxed{c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i\frac{2\pi}{N} k\cdot j}}$ (diskrete Fourier Transformation DFT)

- Fast Fourier Transformation FFT
Wenn $N = 2^m$, lässt sich die Rechenzeit stark verkürzen.

- Diskrete Cosinus Transformation DCT
$y = f(x),\ x \in [0, T],\ N$ gleiche Intervalle (meist $N = 2^m$). Die Abtastpunkte sind hier die Mitten der Intervalle.



$$x_j = \frac{h}{2} + j \cdot h = T \cdot \frac{2j+1}{2N} \qquad (j = 0, \dots, N-1)$$
Ansatz: $y = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\omega}{k}x)$ (stetiger Fall)
$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{k\pi(2j+1)}{2N}\right)$ (diskreter Fall)
Matrixform: $\underline{y} = \underline{Ca}$
Die Spalte von $\underline{C}$ bilden orthogonale Basis von $\mathbb{R}^N$ (entsprechende Normierung führt zu

ORTHONORMALER BASIS). Daher können wir wie bei der Fourier-Transformation vorgehen:
$\underline{a} = \underline{C}^{-1}y$ ... DCT
$\underline{y} = C\underline{a}$ ... IDCT
Anwendung: Audio und Videokompression (MP3, JPEG). Die Komprimierung erfolgt dabei im Frequenzbereich. kleine Amplituden $a_k \to 0 \rightsquigarrow$ Datenreduktion

5 DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER REELLER VERÄNDERLICHEN

5.1 FUNKTIONEN MEHRERER REELLER VERÄNDERLICHER

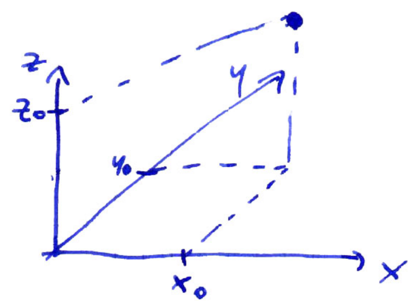
Betrachte Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ wobei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Wir schreiben dann $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wobei $x_1, \ldots, x_n$ unabhängige Variablen und z die abhängige Variable heißen.

Geometrische Veranschaulichung für $n = 2$ Meist schreibt man hier x, y statt x_1, x_2.
$z = f(x, y) \quad (x, y) \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \{(x, y, z) | (x, y) \in Db(f) \wedge z = f(x, y)\}$ ist i.A. eine Fläche in $\mathbb{R}^3$

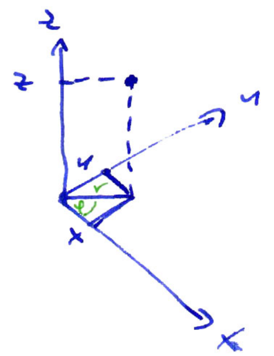
5.1.1 FLÄCHEN IN $\mathbb{R}^3$

(1) Darstellung eines Punktes (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$

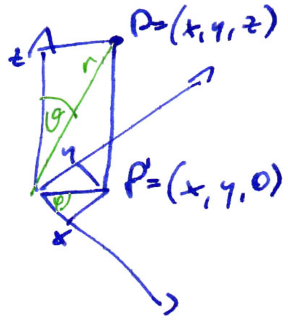
- x, y, z ... karthesische Koordinaten



- r, φ, z ... Zylinderkoordinaten
  $x = r \cdot \cos\varphi$ (ebene Polarkoordinate)
  $y = r \cdot \cos\varphi$ (ebene Polarkoordinate)
  $z = z$
  Umrechnung: $x^2 + y^2 = r^2, \ldots$



- $r, \varphi, \vartheta \ldots$ Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)
  $x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$
  $x = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$
  $z = r\cos(\vartheta)$



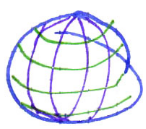
  Beachte: r hat hier andere Bedeutung als bei Zylinderkoordinaten.

(2) Flächendarstellung:

- Explizite karthesische Koordinaten
  $z = f(x, y) \quad x, y \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$
- Implizite karthesische Darstellung
  $F(x, y, z) = 0$
- Parameter-Darstellung
  $x = x(u, v)$
  $y = y(u, v)$
  $z = z(u, v), \quad u, v \in B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw.
  $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)a \end{pmatrix}$ mit $(u, v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$
  Koordinatenlinien:
  $v = v_0$ fest $\Rightarrow \underline{r} = r(u, v_0) \ldots$ Kurvenschar mit Parameter u auf der Fläche.
  $u = u_0$ fest $\Rightarrow \underline{r} = r(u_0, v) \ldots$ Kurvenschar mit Parameter v auf der Fläche.

Bsp. 1: (Kugel, Mittelpunkt O, Radius R)
$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = R\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = R\cos\vartheta \qquad \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$
φ geographische Länge
ϑ geographische Breite

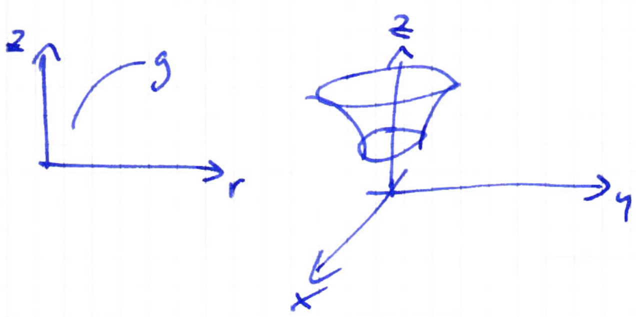
Koordinatenlinien:
$\vartheta =$const. ... Breitenlinien
$\varphi =$const. ... Meridian



Parameterfreie Darstellung:
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (implizite Darstellung)

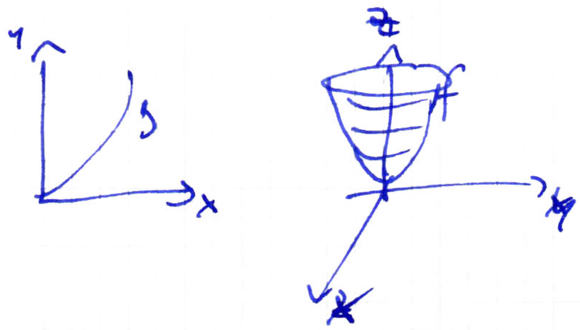
$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (explizite Darstellung. $+$ für obere, $-$ für untere Halbkugel)
Explizite Darstellung in Zylinderkoordinaten:
$z = f(r,\varphi),\ (r,\varphi) \in B \subseteq [0,\infty) \times \mathbb{R}$
r und φ sind ebene Polarkoordinaten

Spezialfall A $\quad z = f(r,\varphi) \underset{\substack{\text{hängt nicht}\\ \text{von } \varphi \text{ ab}}}{=} g(r),\ r \in I \subseteq [0,\infty),\ \varphi \in [0,2\pi]$
$\Rightarrow$ Rotationsfläche um Rotationsachse: z-Achse



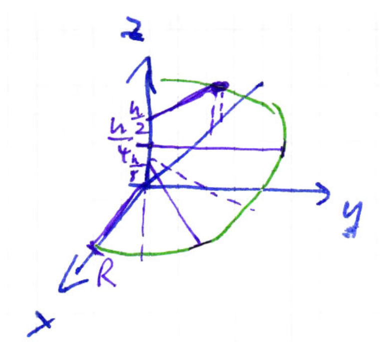
In karthesischen Koordinaten:
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$z = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) =: h(x^2+y^2)$

Bsp. 2: $\quad z = x^2 + y^2 \quad (= h(x^2+y^2))$
$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow z = f(x,y) = r^2 =: g(r)$



Spezialfall B $\quad z = f(r,\varphi) \underset{\substack{\text{hängt nicht}\\ \text{von } r \text{ ab}}}{=} g(\varphi) \quad , r \in I_1 \in [0,\infty),\ \varphi \in I-2 \subseteq \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Wendelfläche um z-Achse

Bsp. 3: $\quad z = f(r,\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi =: g(\varphi) \quad \varphi \in [0,\pi],\ r \in [0,R]$
in Parameterdarstellung:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = \frac{h}{2\pi}\varphi \quad \varphi \in [0,\pi],\ r \in [0,R]$



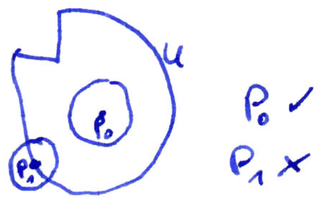
Koordinatenlinien
$r = \text{const.}\dots$ Schraubenlinien $\quad (\varphi \in [0, \pi])$
$\varphi = \text{const.}\dots$ Strecken der Länge R, parallel zur $x - y$ Ebene $\quad (r \in [0, R])$

5.1.2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT

Einige Begriffe
Wir betrachten hier nur den Fall $n = 2$. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gelten die Definitionen analog.

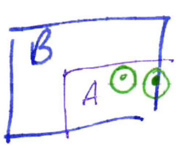
- ε-UMGEBUNG VON $P_0 = (x_0, y_0)$ (bzw. offene ε-Kugel um P_0):
  $U_\varepsilon(x_0, y_0) = \left\{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\right\}$ wobei $\varepsilon > 0$

- UMGEBUNG:
  Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Umgebung von $P_0 = (x_0, y_0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq U$

  U ist Umgebung von P_0 aber keine Umgebung von P_1 (es lässt sich von P_1 kein Radius finden, der komplett innerhalb von U liegt).

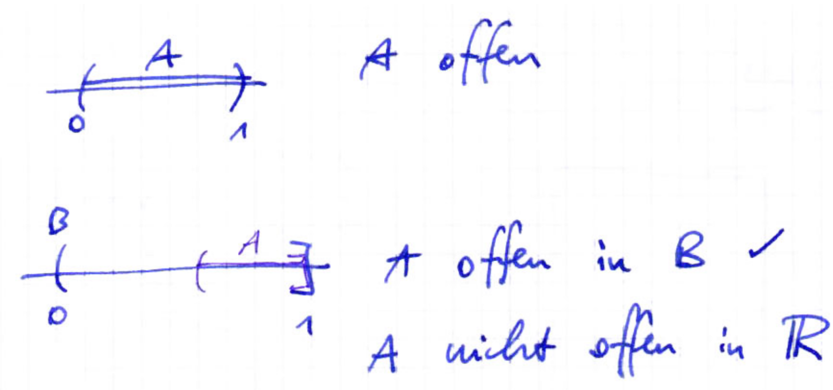
- OFFEN IN (BEZÜGLICH) EINER MENGE:
  Sei $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Menge A heißt offen in (bezüglich) B, falls für alle $(x, y) \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B \cap U_\varepsilon(x, y) \subseteq A$.

  A offen in B, wenn Grenze nicht in A
  A nicht offen in B, wenn Grenze in A

- OFFEN:
  Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt offen, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:
  (1) U ist offen bezüglich $\mathbb{R}^2$
  (2) U ist Umgebung jedes seiner Punkte
  (3) Für jeden Punkt $(x, y) \in U$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x, y) \subseteq U$

Veranschaulichung:



- Abgeschlossen:
  Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist. D.h. $A^C = \mathbb{R}^2 \setminus A$ ist offen.

  $(0, 1]$ ist weder offen noch abgeschlossen.
  $[0, 1] \times [0, 1]$ ist abgeschlossen.

- Innerer Punkt
  Der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt innerer Punkt von $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls:
  (1) $(x, y) \in A$
  (2) A ist Umgebung von (x, y)

- Häufungspunkt:
  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt Häufungspunkt der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls jede Umgebung von (x, y) mindestens einen Punkt aus A enthält.
  Bspw. ist 0 ein ist HP der Menge $(0, 1)$.

- Zusammenhängend:
  Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt zusammenhängend, falls es keine Zerlegung $A = B \cup C$ gibt mit
  – B und C sind disjunkt
  – B und C sind offen in A
  – $B \neq \varnothing$ und $C \neq \varnothing$

- Randpunkte:
  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt Randpunkt der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ falls jede Umgebung von (x, y) sowohl Punkte aus A, als auch Punkte aus $A^C = \mathbb{R}^2 \setminus A$ enthält (A^c: Komplement).

- Menge aller Randpunkte:
  Die Menge aller Randpunkte von $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit ∂A („Rand von A“).

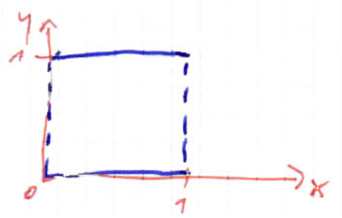
- Abschluss von A:
  $\overline{A} = A \cup \partial A$. Es gilt $\overline{A} = \{(x, y) \mid (x, y)$ ist Häufungspunkt von $A\}$

- Das Innere von A:
  $A^\circ := A \setminus \partial A$

- Gebiet:
  Eine zusammenhängende offene Menge heißt Gebiet.

Bsp. 1: $A = (0,1)$, dann:
$\partial A = \{0,1\}$
$A^\circ = (0,1)$
$\overline{A} = [0,1]$

Bsp. 2: $A = (0,1) \times [0,1] = \{(x,y) \mid x \in (0,1),\ y \in [0,1]\}$



- A weder offen noch abgeschlossen.
- $\partial A = ([0,1] \times [0,1]) \setminus ((0,1) \times (0,1))$ (alle 4 Linien der Zeichnung)
- $\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$
- $A^\circ = (0,1) \times (0,1)$

Def. 1: Gegeben sei $z = f(x,y),\ (x,y) \in Db(f)$ und es sei $(x_0|y_0) \in \mathbb{R}^2$ und es existiert eine Umgebung $U(x_0,y_0)$ mit $U(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\} \subseteq Db(f)$
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n,y_n) mit $(x_n,y_n) \in Db(f)$, $(x_n,y_n) \neq (x_0,y_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = a$.

Bemerkung: Für JEDE Annäherung an (x_0,y_0) muss die vorhergehende Formel gelten. Es genügt nicht eine geradlinige Näherung zu betrachten.

Def. 2: Es gelte $U(x_0,y_0) \subseteq Db(f)$. Dann heißt f stetig an der Stelle (x_0,y_0), falls $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ (vgl. Def. 3 aus Kapitel 2.2).

5.2 PARTIELLE ABLEITUNGEN

Def. 1: Die Funktion $z = f(x,y),\ (x_0,y_0) \in Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle (x_0,y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$\boxed{f_x(x_0,y_0) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$ existiert.

Analog: f an der Stelle (x_0,y_0) partiell nach y differenzierbar, falls

$\boxed{f_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}}$ existiert.

Diskussion:

(1) Es sei $g(x) := f(x,y_0)$ d.h. y_i ist fest gewählt. Dann ist $g'(x_0) = f_x(x_0,y_0)$ (g': gewöhnliche Ableitung einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$). $\Rightarrow$ Ableitungsregeln aus Abschnitt 3.2 sind sinngemäß zu übertragen

(2) f heißt in dem Gebiet G partiell differenzierbar, wenn f für alle $(x_0,y_0) \in G$ partiell differenzierbar ist.

(3) f heißt im Gebiet G stetig partiell differenzierbar, falls f auf G partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

(4) Analog: Funktionen von mehr als 2 Veränderlichen $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: hält man die Variablen $x_2, \ldots, x_n$ fest, und differenziert nach x_1, so ergibt sich f_{x_1}. Analoges Vorgehen für $f_{x_2}, f_{x_3}, \ldots$

(5) Bezeichnungen:
$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f = z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$
$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \ldots$

(6) Höhere Ableitungen:
$f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
$f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ usw.
Frage: $f_{xy} = f_{yx}$?

Satz 1: Die Funktionen f, f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} seien in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ einer Stelle $(x_0, y_0) \in Db(f)$ erklärt. Außerdem sei f_{xy} an der Stelle (x_0, y_0) stetig. Dann gilt:

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}$$

Bemerkung: Satz 1 heißt Satz von Schwarz.

Bsp. : $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^3} + y^2 - x \quad y \neq 0$

- $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_x = \dfrac{2x}{y^3} - 1$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_{xx} = \dfrac{2}{y^3}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_{xy} = \dfrac{-6x}{y^4}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_y = -\dfrac{3x^2}{y^4} + 2y$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $f_{yy} = -\dfrac{6x}{y^4}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $f_{yx} = \dfrac{-6x}{y^4}$

Man sieht: $f_{xy} = f_{yx}$.

Satz 2: (Verallgemeinerte Kettenregel)
Die Funktionen $z = f(u, v),\ u = g(x, y),\ v = h(x, y)$ seien stetig partiell differenzierbar (nach allen Variablen). Dann ist die Funktion $z = f^*(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ partiell nach x und y differenzierbar. Und es gilt:
$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$
$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$

Bsp.: $z = (x^2+3y^2)^{x+2y}$ ist nach x und y zu differenzieren.
$u = x^2+3y^2,\ v = x+2y \ \Rightarrow\ z = f(u,v) = u^v$
$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = v \cdot u^{v-1} \cdot 2x + u^v \cdot \ln(u) \cdot 1 = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot 2x + \ln u\right)$
$\Rightarrow z_x = (x^2+3y^2)^{x+2y} \left(\frac{x+2y}{x^2+3y^2e} \cdot 2x + \ln\left(x^2+3y^3\right)\right)$
$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = v \cdot u^{v-1} \cdot 6y + u^v \ln(u) \cdot 2 = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot 6y + 2\ln u\right)$
$\Rightarrow z_y = (x^2+3y^2)^{x+2y} \left(\frac{x+2y}{x^2+3y^2} \cdot 6y + 2\ln\left(x^2+3y^2\right)\right)$

Bemerkung: Verallgemeinerung auf mehr als 2 Variablen:
$z = f(u_1,\dots,u_m),\ u_i = g_i(x_1,\dots,x_n) \quad i = 1,\dots,m$
$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad , \ k = 1,\dots,n$

Satz 3: (Satz über implizite Funktionen)
Sei $F(x,y)$ in eine einer Umgebung von (x_0,y_0) stetig partiell nach x und y differenzierbar und sei $F(x_0,y_0) = 0$ und $F_y(x_0,y_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U(x_0)$, so dass die Gleichung $F(x,y) = 0$ eindeutig eine Funktion $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ erklärt, mit $F(x,f(x)) = 0 \forall x \in U(x_0)$. Außerdem gilt dann:
$\boxed{f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}} \quad \forall x \in U(x_0)$

Beweis der Ableitungsregel
$F(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{y}_{v}) = F(x,f(x)) = 0$ differenzieren wir nach x:
$F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(x) = 0$ durch Umformen erhält man dann:
$\Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$

Diskussion: Mittels Satz 3 ist eine Kurvendiskussion für implizit gegebene Kurven $F(x,y) = 0$ möglich, ohne die Gleichung explizit aufzulösen. Für die 2. Ableitung ergibt sich:
$f''(x) = -\frac{(F_{xx} \cdot 1 + F_{xy} \cdot y') \cdot F_y - F_x(F_{yx} \cdot 1 + F_{yy} \cdot y')}{F_y^2}$
$\overset{y' = -\frac{F_x}{F_y}}{\Longrightarrow} \boxed{f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}}$

Def. 2: Gegeben sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Die vektorwertige Funktion (Vektorfeld) $\nabla f : Db(f) \to \mathbb{R}^2\ \nabla f(x,y) := \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$ heißt GRADIENT von f.

Ist $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist $\nabla f : Db(f) \to \mathbb{R}^n\ \nabla f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$ der Gradient.

Bemerkung: Häufig schreibt man auch $\mathrm{grad} f$ statt ∇f.

Diskussion:

(1) Eigenschaften des Gradienten und Anwendungen besprechen wir in Kapitel 5.4.1.

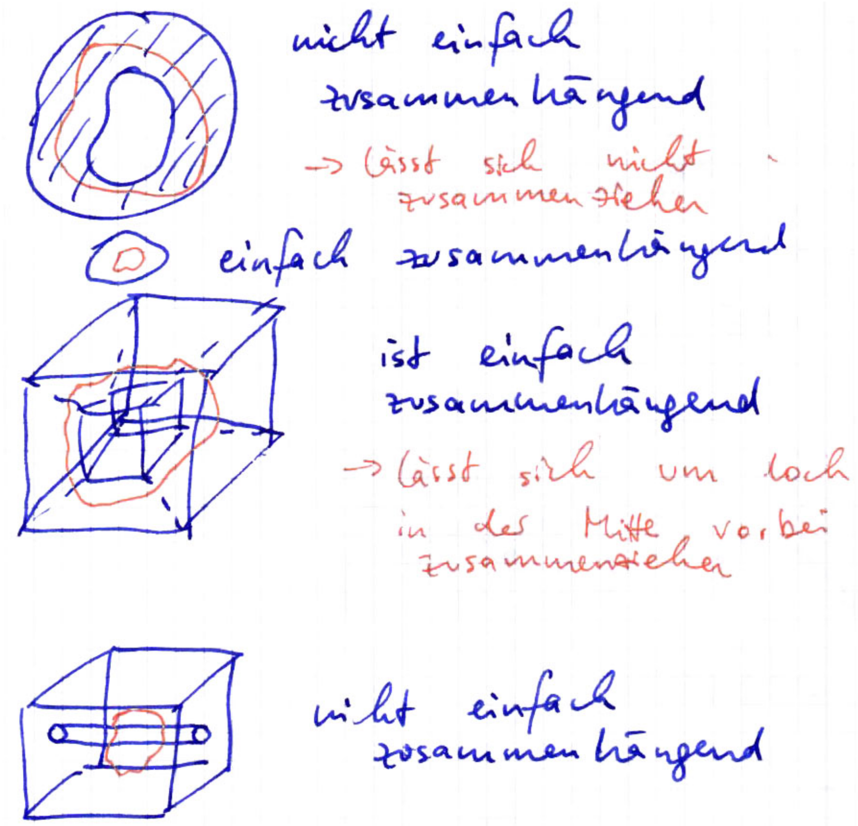
(2) Umkehrung:

Gegeben: Vektorfeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

Gesucht: Funktion F mit $\underline{v} = \nabla F$ (d.h. die Ableitung ist vorgegeben, gesucht ist F)
F heißt dann Stammfunktion oder Potential von $\underline{v}$. Es existiert genau dann eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x = P(x,y)$ und $F_y = Q(x,y)$, wenn

- F in einem EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDEN GEBIET $G \subseteq \mathbb{R}^2$ liegt und
- die sogenannten INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN erfüllt: $P_y = Q_x$.

Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, genau dann wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve eindeutig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.



5.3 TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT UND FEHLERRECHNUNG

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle $(x_0, y_0) \in Db(f)$ total differenzierbar, falls es Konstanten α und β gibt, so dass die lineare Abbildung $(h,k) \mapsto L(h,k) = \alpha h + \beta k$ die Abbildung $(h,k) \mapsto f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ approximiert. D.h. wenn für $R(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)$ der Grenzwert $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ gilt.

Satz 1:

(a) f sei in Umgebung von (x_0, y_0) stetig partiell nach x und y differenzierbar. Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) auch total differenzierbar.

(b) f sei bei (x_0, y_0) total differenzierbar. Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) partiell differenzierbar und es gilt $\alpha = f_x(x_0, y_0),\ \beta = f_y(x_0, y_0)$.

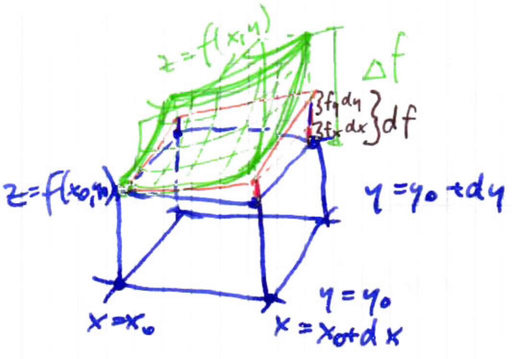
Def. 2: $\mathrm{d}f(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$ heißt das zur Stelle (x_0, y_0) und den Zuwächsen $h = \Delta x = \mathrm{d}x$ und $k = \Delta y = \mathrm{d}y$ gehörende TOTALE DIFFERENTIAL von f. Die Summanden heißen partielle Differentiale.
Schreibweise: $\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y$

Diskussion:

(1) Es gilt $\Delta f := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f + R(h, k)$.
$\Rightarrow \Delta f \approx \mathrm{d}y$ (falls $|h|,\ |k|$ klein)
$\Rightarrow$ Anwendung in der Fehlerrechnung: Absoluter Fehler
$|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| \leq |f_x(x_0, y_0)| \cdot |\Delta h| + |f_y(x_0, y_0)| \cdot |\Delta y|$
Mit den Fehlerschranken $S_f := \max |\Delta f|$, $S_x := \max |\Delta x|$, $S_y := \max |\Delta y|$ gilt daher $S_f \approx |f_x(x_0, y_0)| \cdot S_x + |f_y(x_0, y_0)| \cdot S_y$ (lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz)

(2) Geometrische Veranschaulichung

- Δf ist Zuwachs der Funktion wenn (x, y) von (x_0, y_0) in $(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$ übergeht
- $\mathrm{d}f$ ist der entsprechende Zuwachs der Tangentialebene (TE) an die Fläche $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0, z_0).

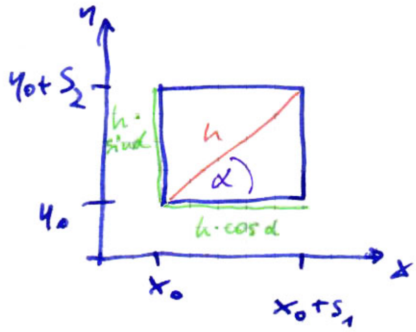


(3) Anwendung für die Fehlerrechnung: Übung

5.4 WEITERE BEGRIFFE, ANWENDUNGEN

5.4.1 RICHTUNGSABLEITUNG, TANGENTIALEBENEN

Def. 1: $f(x, y)$ besitze in (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung. Für jeden Vektor $\underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = |\underline{s}| \cdot \left(\cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ heißt
$\dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h\cos(\alpha), y + h\sin(\alpha)) - f(x_0, y_0)}{h}$ Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung $\underline{s}$ (bzw. in Richtung α).



Diskussion:

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ ist der Flächenanstieg in Richtung $\underline{s}$.

(2) Speziell:

$\underline{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial s} = f_x$

$\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha = 90° \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial s} = f_y$

Satz 1: (Berechnung der Richtungsableitung)
Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{f_x(x_0, y_0) \cdot s_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \\ &= (\nabla f(x_0, y_0), \underline{s}^\circ) \qquad \text{(das Skalarprodukt)} \end{aligned}$$

wobei $\underline{s}^\circ = \dfrac{s}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$ die auf Länge 1 normierte Version von s ist.

Satz 2: (Eigenschaften des Gradienten im Fall $z = f(x, y)$)
Der Vektor $\nabla f(x_0, y_0)$

(a) steht senkrecht auf (der Projektion in die x-y-Ebene) der Höhenlinie $f(x, y) = c$ zum Niveau $z = c = f(x_0, y_0)$.

(b) zeigt in die Richtung des stärksten Funktionszuwachses. Dieser ergibt sich mittels $\max\limits_{\underline{s}} \dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|$

Anschaulich: $z = f(x, y)$

Diskussion: Anwendung Tangentialebenengleichungen (TE)

- TE an die Fläche $F(x, y, z) = 0$ im Punkt (x_0, y_0, z_0):
  $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(\dots)(y - y_0) + F_z(\dots)(z - z_0) = 0$
  Denn: Fläche $F(x, y, z) = 0$ ist eine Niveaufläche von $u = F(x, y, z)$ zum Niveau 0.
  $\Rightarrow n := \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ist ein Normalenvektor dieser Fläche

$\Rightarrow$ Tangentialebene ist gegeben durch $(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ (Skalarprodukt).

D.h. $$\left(\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ F_y(\dots) \\ F_z(\dots) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

- Speziell: $z = f(x, y) \Rightarrow$ TE in (x_0, y_0, z_0).
  $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
  Denn: $z = f(x, y) \Leftrightarrow 0 = f(x, y) - z =: F(x, y, z)$
  $\Rightarrow F_x = f_x,\ F_y = f_y,\ F_z = -1$

Bsp. 1: $z = f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}(x^2 + y^2),\ P_0 = (3, -3) \Rightarrow z_0 = 2$

(a) Gradient : $\nabla f = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}x \\ -\frac{2}{9}y \end{pmatrix}$

$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

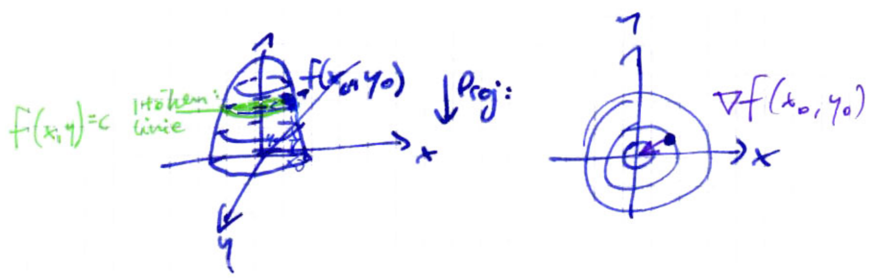
(b) max. Funktionsanstieg in (x_0, y_0):
$|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,9428$

(c) Tantentialebene in (x_0, y_0, z_0):
$z = 2 + (-\frac{2}{3})(x - 3) + \frac{2}{3}(y + 3)$
$\Leftrightarrow 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} - \frac{y}{9} + \frac{z}{6} = 1$

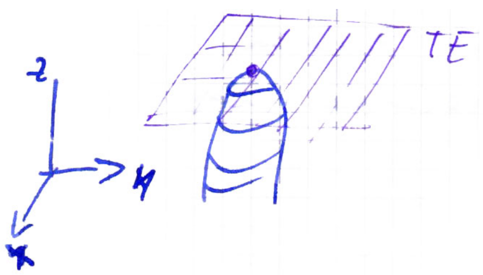
5.4.2 LOKALE EXTREMA (OHNE NEBENBEDINGUNGEN) VON FUNKTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHER

Def. 2: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt in (x_0, y_0) lokal $\begin{cases} \text{minimal} \\ \text{maximal} \end{cases}$, wenn es eine Umgebung $U(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in U(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$ gilt $\begin{cases} f(x, y) > f(x_0, y_0) \\ f(x, y) < f(x_0, y_0) \end{cases}$

Diskussion: Anschaulich:



TE liegt parallel zur x-y-Ebene.



Bezeichnungen:

- (x_0, y_0) ... Extremstelle
- $z_0 = f(x_0, y_0)$ ... Extremwert
- (x_0, y_0, z_0) ... Extrempunkt

Offensichtlich ist der Funktionsanstieg (Richtungsableitung) für alle Richtungen $= 0$. Daher auch $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$.

Satz 3: (Notwendige Bedingungen für lokale Extrema)
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle (x_0, y_0) lokal und partiell differenzierbar. Dann gilt :
$f_x(x_0, y_0) = 0$
$f_y(x_0, y_0) = 0$

Satz 4: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

(1) $f(x, y)$ besitze in $U(x_0, y_0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

(2) Die notwendige Bedingung $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ sei erfüllt.

Dann gilt mit $D(x, y) := f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

$\boxed{D(x_0, y_0) > 0} \Rightarrow f$ in (x_0, y_0) lokal extremal und insbesondere

- lokal minimal, falls zusätzlich $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
- lokal maximal, falls zusätzlich $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Beachte: $D(x, y)$ wird Diskriminante genannt.

Diskussion:

(1) $D(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ haben beide das gleiche Vorzeichen. Daher kann die Bedingung an f_{xx} durch die gleiche Bedingung an f_{yy} ersetzt werden.

(2) Allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung von lokalen Extrema von $f(x, y) = z$:

(a) Gleichungssystem $f_x = 0$, $f_y = 0$ lösen.
$\rightsquigarrow$ liefert extremwertverdächtige Stellen $P_E = (x_E, y_E)$

(b) Für diese Stellen $P_E = (x_E, y_E)$ Diskriminante berechnen.

1. Fall: $D(x_E, y_E) > 0 \Rightarrow$ Extremum $f_{xx} \begin{cases} > 0 & \text{... Minimum} \\ < 0 & \text{... Maximum} \end{cases}$
2. Fall: $D(x_E, y_E) = 0 \Rightarrow$ gesonderte Untersuchung notwendig
3. Fall: $D(x_E, y_E) < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt (im engeren Sinn).

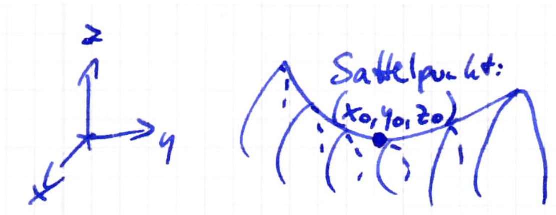
Allgemein: Stationäre Stellen, die keine Extrema sind werden als Sattelstellen bezeichnet.

Bsp. 2: $z = f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 - y^2 + 4$

(a) $f_x(x,y) = 2y^2 - 4x \overset{!}{=} 0$
$f_y(x,y) = 4xy - 2y \overset{!}{=} 0$
aus f_y: $\Rightarrow 0 = \underbrace{2y}_{y=0}\underbrace{(2x-1)}_{x=\frac{1}{2}}$
aus f_x: $\Rightarrow x = 0, y = \pm 1$
$\Rightarrow$ Extremwertverdächtige Stellen: $P_1(0,0),\ P_2 = (\frac{1}{2}, 1),\ P_3 = (\frac{1}{2}, -1)$

(b) $f_{xx} = -4$, $f_{yy} = 4x - 2$, $f_{xy} = 4y$
$\Rightarrow D(x,y) = -4(4x - 2 - (4y)^2$
Nun die Punkte einsetzen:
$P_1 : D(0,0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Extremum $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximum
$P_2 : D(\frac{1}{2}, -1) = -16 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
$P_3 : D(\frac{1}{2}, -1) = -16 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

(3) Sattelstellen anschaulich:



(4) Im Falle $D(x_E, y_E) = 0$ ist eine gesonderte Untersuchung notwendig.
Bspw. Einschränkung des Definitionsbereichs auf Kurven , die durch (x_E, y_E) verlaufen.
Genau dann, wenn ALLE diese Einschränkungen ein Maximum bei (x_E, y_E) aufweisen ist (x_E, y_E) eine Maximumstelle von f.

Bsp. 3: $z = f(x,y) = x^4 - y^4$
$f_x = 4x^3 \overset{!}{=} 0$
$f_y = -4y^3 = 0$
$\Rightarrow x = 0,\ y = 0 \rightarrow P_E = (0,0)$
$f_{xx} = 12x^2,\ f_{yy} = -12y^2,\ f_{xy} = 0$
$\Rightarrow D(0,0) = 0$
Einschränkung auf Gerade $x = 0 \Rightarrow z = -y^4 \rightarrow$ hat Maximum (Parabel unten offen)
Einschränknug auf Gerade $y = 0 \Rightarrow z = x^4 \rightarrow$ hat Minimum (Parabel oben offen)
$\Rightarrow$ keine Extremstelle

(5) $z = f(x_1, \ldots, x_n),\ \underline{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^4$

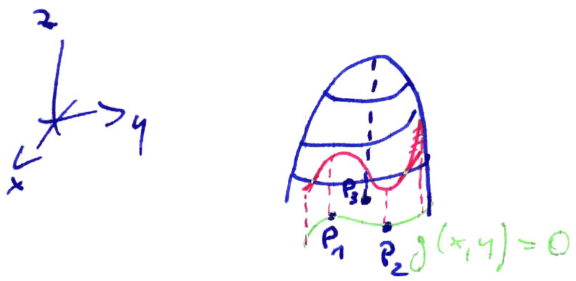
- notwendige Bedingung $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$
  $\rightsquigarrow$ liefert mögliche Extremstelle x_E
- hinreichende Bedingung:
  Definiere die Hesse Matrix: $\underline{H}(\underline{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}\right)_{i,j=1}^{n}$ (alle möglichen Ableitung von 2 Variablen)
  (a) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind positiv $\Rightarrow x_E$ ist lokales Minimum
  (b) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind negativ $\Rightarrow x_E$ ist lokales Maximum
  (c) Eigenwerte von $\underline{H}(\underline{x})$ sind sowohl positiv als auch negativ $\Rightarrow x_E$ ist Sattelpunkt (keine Extremstelle)

(d) Wenigstens ein $EW = 0$ ($\Leftrightarrow \det \underline{H}(\underline{x_E}) = 0$) $\Rightarrow$ gesonderte Betrachtung notwendig (außer es gilt gleichzeitig c.))
Beachte für $n = 2$:
$\det(\underline{H}(\underline{x_E}) - \lambda\underline{E}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$
$\overset{\lambda=0}{\Rightarrow} \det(\underline{H}(\underline{x_E})) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = D(x_E)$
$\lambda_1 + \lambda_2 = f_{xx}(x_E) + f_{yy}(x_E)$
Damit ist diese Vorgehensweise für hinreichende Bedingung identisch mit der Fallunterscheidung in Diskussion aus 2.).

5.4.3 LOKALE EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

Problem: Gesucht sind lokale Extrema von $z = f(x, y)$ unter der Nebenbedingung (NB) $g(x, y) = 0$.
Anschaulich:

- Fläche $z = f(x, y)$ wird mit Zylinderfläche $g(x, y) = 0$ geschnitten.
  $\rightsquigarrow$ Schnittkurve C
- Gesucht sind Stellen (x_0, y_0) auf der Kurve $g(x, y) = 0$ an denen C extremale Höhe über der x-y-Ebene besitzt.



g liegt in x-y-Ebene.
↳ projektion auf kuppel

Diskussion:

(1) $g(x, y) = 0$ ist auffassbar...
   (a) als Kurve in x-y-Ebene $K = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$
   (b) als Zylinderfläche $\perp$ x-y-Ebene (Zylinderfläche wird erzeugt von einer ebenen Kurve K. Entlang dieser wird eine Gerade, die senkrecht auf der x-y-Ebene steht verschoben).

(2) Falls $g_y \neq 0 \Rightarrow g(x, y) = 0$ ist nach y auflösbar, d.h. $y = y(x)$, damit $z = f(x, y(x)) \rightarrow$ Extrema berechnen. Notwendige Bedingung ist als $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_x + f_y y' = 0$. Außerdem gilt $g(x, y(x)) = 0 \Rightarrow g_x + g_y y' = 0$ mit $\underline{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \neq 0,\ \underline{b} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix},\ \underline{c} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ gilt $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ und $(\underline{a}, \underline{c}) = 0$.
$\Rightarrow \underline{b} + \lambda\underline{c} = 0$ (mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \boxed{f_x + \lambda g_x = 0 \quad f_y + \lambda g_y = 0}$ (falls $g_x \neq 0$, analoges vorgehen)
Dies ergibt die LAGRANGE-METHODE:

(a) Bilde Lagrange Funktion:
$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
unter Verwendung des Hilfsparameters λ.
Beachte: NB muss in Form $g(x, y) = 0$ gegeben sein.

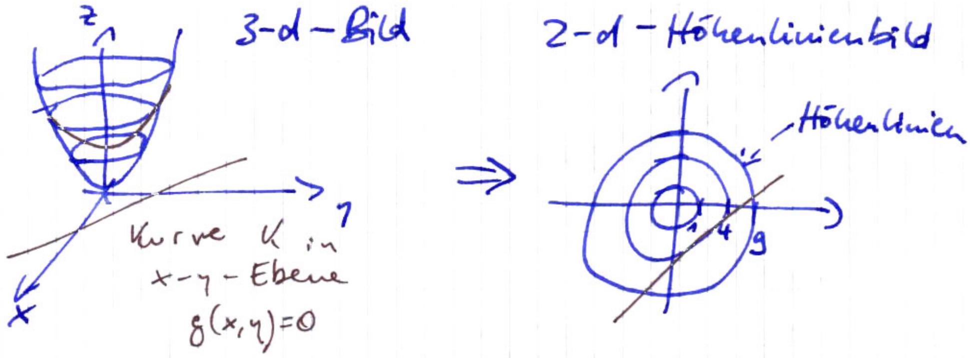
(b) Es sei (x_E, y_E) eine lokale Extremstelle von $z = f(x, y)$ unter der NB $g(x, y) = 0$. Außerdem sollen f und g stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzen (in $U(x_0, y_0)$) und es gelte $\nabla g(x_E, y_E) \neq 0$ (d.h. $g_x(x_E, y_E) \neq 0 \vee g_y(x_E, y_E) \neq 0$, denn dann kann NB nach x oder y aufgelöst werden). DANN gibt es eine Lösung des Gleichungssystems

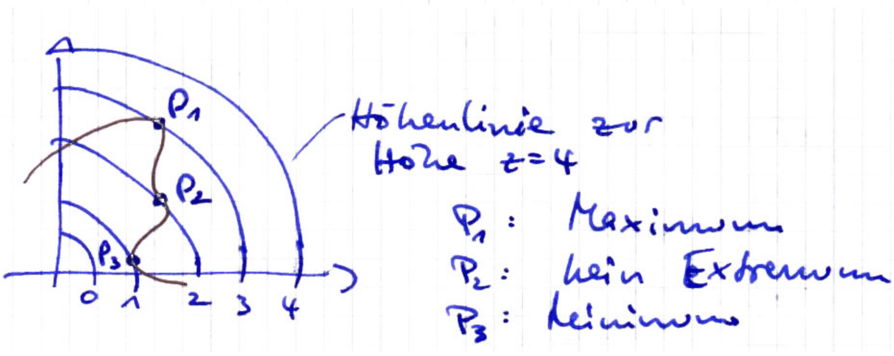
$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$
$$F_z = 0$$

der Gestalt (x_E, y_E, λ_E). D.h. die Lösungen des Gleichungssystems liefern stationäre Stellen (mögliche Extremstellen).
SONDERFALL: Eventuell vorhandene Stellen (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$ (sogenannte singuläre Punkte der Kurve K $g(x, y) = 0$) können Extremstellen sein, ohne dass sie sich aus dem Gleichungssystem ergeben. Diese müssen daher gesondert betrachtet werden.

(c) Untersuchung der stationären Stellen bspw. mittels

- Höhenlinienbild





oder:

- geometrische Überlegung
- die hinreichende Bedingung:
  $D := F_{xx} g_y^2 - 2F_{xy} g_x g_y + F_{yy} g_x^2$ mit $F = f + \lambda g$.
  Dann $D(x_E, y_E, \lambda_E) \begin{cases} < 0 & \text{Maximum} \\ > 0 & \text{Minimum} \end{cases}$

Bsp. 4: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ mit NB $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(a) $F(x,y,\lambda) = \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)}_{g(x,y)}$

(b)

$$F_x = 2x + 2\lambda x = 0$$
$$F_y = 2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0$$
$$F_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

Aus erster Gleichung: $\underbrace{2x}_{\to x=0} \underbrace{(1+\lambda)}_{\to \lambda=-1} = 0$

Fall $x = 0$: $\overset{\text{3. Gl.}}{\Rightarrow} y = \pm 2,\ \lambda = \dots$
Fall $\lambda = -1$: $\overset{\text{2. Gl.}}{\Rightarrow} 2y - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0 \overset{\text{3. Gl.}}{\Rightarrow} x = \pm 1$

Koordinaten für lokale Extrma sind also $P_1 = (0,2),\ P_2 = (0,-2),\ P_3 = (-1,0),\ P_4 = (1,0)$. Im Höhenlinienbild wird klar: P_1 und P_2 sind Maxima (mit Funktionswert 4), P_3 und P_4 sind Minima (mit Funktionswert 1).
Beachte: Alternativ nutzt man das hinreichende Kriterium aus c.) (mit $D(x_E, y_E, \lambda_E)$).
Also: Wenn möglich Bild Zeichen und als hinreichendes Kriterium nutzen oder das Kriterium aus c.) nutzen.

Bemerkung:

(1) Für Funktionen $f(x_1,\dots,,x_n)$ mit $n > 2$ Veränderlichen und $k < n$ Nebenbedingungen $g : (x_1,\dots,x_n) = 0$ analoges Vorgehen:
Lagrange Funktion:
$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1,\dots,x_n)$
Die Bedingung 1.) wird dann zu
$rang \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} = k$

(2) Falls NB eindeutig nach k Veränderlichen auflösbar, dann Rückführung auf Problem OHNE NB mit $n-k$ Veränderlichen möglich.
Vorsicht: in Bsp. 4 lösen wir nach y auf: $y^2 = 4(1-x^2) \ \Rightarrow\ y = \pm\sqrt{4(1-x^2)}$
Einsetzen liefert: $z = x^2 + y^2 = 4 - 3x^2$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -6x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$
Es ergeben sich somit nur P_1 und P_2 und nicht alle Lösungen, da y nicht eindeutig!

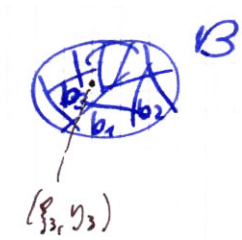
6 INTEGRALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

6.1 INTEGRALE ÜBER EBENE BEREICHE

6.1.1 BEGRIFF

- Geg.:
  (1) Beschränkter, abgeschlossener Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$
  (2) Fläche $z = f(x, y) \geq 0$, f stetig
- Ges.: Volumen V des Körpers K unter der Fläche über dem Bereich B

- Idee: Zerlegung der Fläche b in Teilbereiche $\Delta b \rightsquigarrow$ Zerlegung von K in Säulen mit dem Volumen ΔV: $\Rightarrow V = \sum \Delta V_i \approx \sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta b_i$



- f stetig, Verfeinerung, Grenzübergang $\rightsquigarrow$ Grenzwert V existiert unabhängig von Zerlegungssäulen.
- Schreibweise: $\iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b$ ... Bereichsintegral

Diskussion

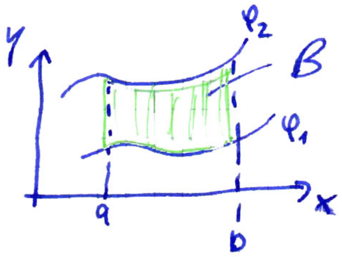
(1) Einteilung von B durch achsenparallele Geraden

$\Rightarrow \mathrm{d}b = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$
$\Rightarrow$ Schreibweise: $\iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b = \iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(2) Unabhängig von der geometrischen Bedeutung wird das Bereichsintegral auch für Funktionen mit negativen Funktionswerten definiert.

6.1.2 REDUKTION AUF DOPPELINTEGRALE

Gegeben seien zwei stetige Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Der Bereich $B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(xy)\}$ heißt Normalbereich bezüglich der x-Achse.

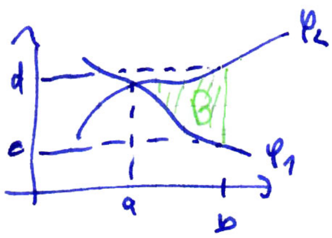


Dann gilt:

$$\boxed{\iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x}$$ (Klammern lässt man oft weg)

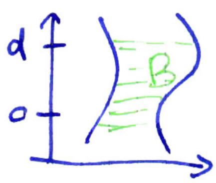
Diskussion:

(1) Normalbereich bezüglich der x-Achse wird links und rechts begrenzt durch Koordinatenlinie $x = a,\ x = b$. Diese Begrenzungen können zu Punkten entarten.

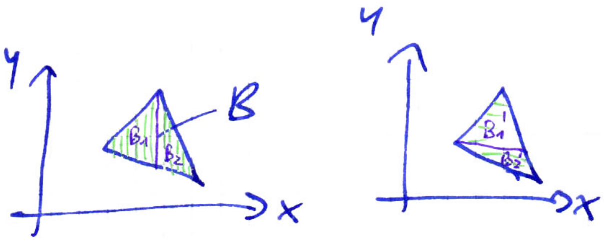


Das Intervall $[a, b]$ ergibt sich durch Orthogonalprojektion von B auf die x-Achse. Daraus ergeben sich die stets konstanten Grenzen a und b für die äußere Integration. Dagegen läuft y in Abhängigkeit von x nur von $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2(x)$ und nicht von c bis d. Grenzen für das innere Integral hängen also im Allgemeinen von der äußeren Integrationsvariablen ab.

(2) Analog: Gegeben $\psi_1(y) \leq \psi_2(y),\ y \in [c, d]$ liefert Normalbereich bezüglich der y-Achse $B = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.
Dann $\iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

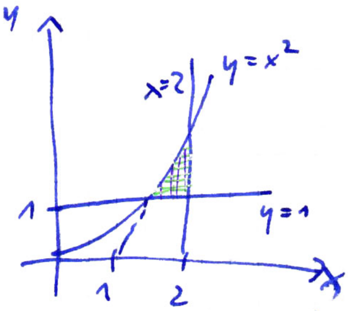


(3) Oft sind beide Varianten möglich. Manchmal ist eine Zerlegung nötig.



(4) Spezialfall: außen und innen konstante Grenzen $\Leftrightarrow$ B ist achsenparalleles Rechteck. Hier ist die Integrationsreihenfolge egal.

Bsp. 1: Zu berechnen ist $I = \iint\limits_B \frac{x}{y}\,\mathrm{d}b$. B werde begrenzt durch $y = x^2,\ x = 2$ und $y = 1$.



$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten zu integrieren

Variante 1: $B = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x^2\}$
Variante 2: $B = \{(x,y) \mid 1 \le y \le 4,\ \sqrt{y} \le x \le 2\}$
Berechnen mit Variante 2:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^4 \int_y^2 \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{\sqrt{y}}^2 \mathrm{d}y \\
&= \int_1^4 \frac{2^2}{2y} - \frac{y}{2y}\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \frac{2}{y} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[2\ln|y| - \frac{1}{2}y\right]_1^4 = 2\ln(4) - 2 - 2\ln(1) + \frac{1}{2} \\
&= 2\ln 4 - \frac{3}{2} = 1{,}2726
\end{aligned}
$$

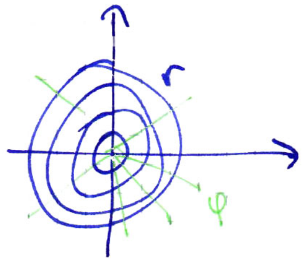
6.1.3 ANWENDUNGEN

Volumen V unter $z = f(x,y) \ge 0$ über B	$V = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$
Flächeninhalt $[B]$ von B	$[B] = \iint\limits_B 1\,\mathrm{d}b = \iint\limits_b \mathrm{d}b$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s) von B	$x_s = \frac{1}{[B]}\iint\limits_B x\,\mathrm{d}b,\ y_s = \frac{1}{[B]}\iint\limits_B y\,\mathrm{d}b$
Integralmittelwert m von f auf B	$m = \frac{1}{[B]}\iint f(x,y)\,\mathrm{d}b$

6.1.4 KOORDINATENTRANSFORMATION

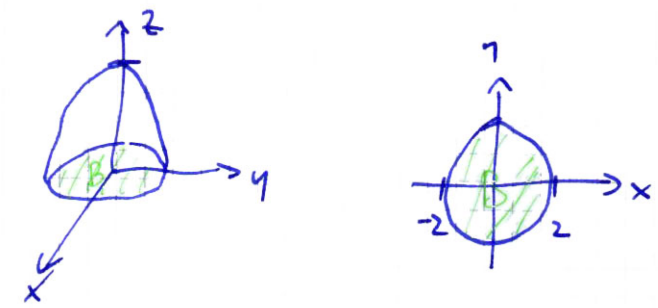
- Ziel: Durch neue Koordinaten (z.B. u und v) möglichst einfache Grenzen erzeugen. Günstig ist es, wenn möglichst viele Begrenzungen von B auf Koordinatenlinien liegen ($u = cost$ oder $v = const$).

- Besonders wichtig: Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Koordinatenlinien sind dann $r = const,\ \varphi = const$



Anwendung falls B Kreisbereich, Kreissektor, Kreisring, ... mit Mittelpunkt 0 ist.
Das Bereichselement ist dann ebenfalls durch die neuen Koordinaten auszudrücken:
$\boxed{\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Bsp. 2: Gesucht ist das Volumen V des Körpers begrenzt durch den Rotationsparaboloid $z = 4 - (x^2 + y^2)$ und der x-y-Ebene ($z = 0$).
Schnittkurve $(z = 0)$: $4 = x^2 + y^2$ (Kreis in x-y-Ebene)



B in Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ mit $r \in [0, 2],\ \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow V = \iint\limits_B 4 - (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}b = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2)\,\underbrace{r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}b}$$

$$= \int_0^2 \int_2^{2\pi} (4r - r^3)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 (4r - r^2)[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^2 4r - r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi[2r^2 - r^4]_0^2$$

$$= 8\pi$$

6.1.4.1 ALLGEMEINE KOORDINATENTRANSFORMATIONEN

geg.: $\boxed{x = x(u, v),\ y = y(u, v)}$

Def.: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ heißt FUNKTIONALDETERMINANTE der gegebenen Transformation.

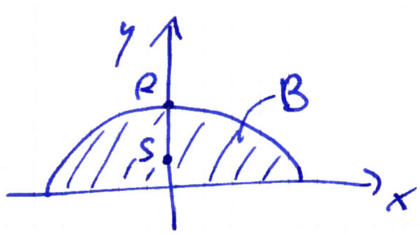
Es ergibt sich für das Bereichsintegral $\mathrm{d}b = |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Falls $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}$ erhält man durch das gegebene eine umkehrbare Abbildung $(x,y) \in B \leftrightarrow (u,v) \in B'$. Für das Bereichsintegral gilt in den neuen Koordinaten $\boxed{I = \iint\limits_{B} f(x,y)\,\mathrm{d}b = \iint\limits_{B'} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$

Diskussion:

(1) Funktionaldeterminante bei Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$:
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$
$\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

(2) Bei Kreisbereichen mit Mittelpunkt (x_0,y_0) verwendet man sogenannte allgemeine Polarkoordinaten mit Pol (x_0,y_0): $x = x_0 + r\cos\varphi,\ y = y_0 + r\sin\varphi$
Dann gilt: $\boxed{\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Bsp. 3: Gesucht: Geometrischer Schwerpunkt S der Kreishalbfläche begrenzt von $x^2+y^2 = R^2$ $(y \geq 0)$.

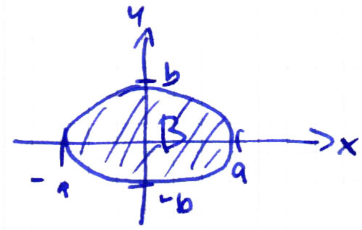


Polarkoordinaten:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r \in [0,R]$
$\varphi \in [0,\pi]$

- Flächeninhalt: $[B] = \iint\limits_{B} \mathrm{d}b = \int_0^R \int_0^\pi r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^R r\,\mathrm{d}r = \pi\frac{R^2}{2}$
- $x_s = 0$ (aus Symmetriegründen)
- $y_s = \iint\limits_{B} y\,\mathrm{d}b = \int_0^R \int_0^\pi \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^R r^2[-\cos\varphi]_0^\pi\,\mathrm{d}r = 2\frac{R^3}{3}$
  $\Rightarrow y_s = \frac{\frac{2}{3}R^2}{\frac{\pi}{2}R^2} = \frac{4}{3}\pi R = 0{,}424R$

$\Rightarrow (x_s,y_s) = \left(0, \frac{4}{3\pi}R\right)$ ist der Schwerpunkt.

Bsp. 4: Gesucht: Flächeninhalt innerhalb einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Parameterdarstellung:
$x = a\cos v$
$y = b\sin v$
$v \in [0, 2\pi]$

- elliptische Polarkoordinaten:
  $x = x(u,v) = a \cdot u \cdot \cos v$
  $y = y(u,v) = b \cdot u \cdot \sin v \Rightarrow B = \{(x,y) \mid x = a\,u\cos v,\ y = b\,u\sin v,\ u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]\}$

- Funktionaldeterminante:
  $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos v & -a\,u\sin v \\ b\sin v & b\,u\cos v \end{vmatrix} = a\,b\,u$$
  $\Rightarrow \mathrm{d}b = a\,b\,u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
  $$\Rightarrow [B] = \iint\limits_B \mathrm{d}b = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a\,b\,u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \pi\,a\,b$$

6.2 OBERFLÄCHENINTEGRALE

6.2.1 FLÄCHEN IM RAUM

Erinnerung:

- $x, y, z \ldots$ karthesische Koordinaten
- $r, \varphi, z \ldots$ Zylinderkoordinaten (r: Abstand von z-Achse, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)
- $r, \varphi, \vartheta \ldots$ (r: Abstand vom Koordinatenursprung, $x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\vartheta$)

Flächendarstellungen:

- $z = f(x,y) \ldots$ explizite karthesische Darstellung
- $F(x,y,z) = 0 \ldots$ implizite karthesische Darstellung
- $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \ldots$ Parameterdarstellung
- $z = f(r,\varphi) \ldots$ explizite Darstellung in Zylinderkoordinaten
  speziell:
  - $z = f(r,\varphi) = g(r),\ r \in I \subset [0,\infty],\ \varphi \in [0,2\pi]$
    Rotationsfläche um z-Achse
  - $z = f(r,\varphi) = g(\varphi),\ r \in I_1 \subseteq [0,\infty],\ \varphi \in I_2 \subseteq \mathbb{R}$
    Wendelflächen

6.2.2 OBERFLÄCHENELEMENT, BERECHNUNG UND ANWENDUNG

- geg.: Fläche $\underline{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in B$.
  Analog zu ebenen Bereichsintegralen ergibt sich $\mathrm{d}F = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ (skalares Oberflächenelement)
- Oberflächenintegral (über Skalarfeld):
  $\iint\limits_F f(x,y,z)\,\mathrm{d}F = \iint\limits_B f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$
- Anwendung(analog zu Bereichsintegralen)

Flächeninhalt $[F]$ von F	$[F] = \iint\limits_F \mathrm{d}F$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s)	$x_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F x\,\mathrm{d}F$ $y_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F y\,\mathrm{d}F$ $z_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F z\,\mathrm{d}F$
Integralmittelwert m von f auf F	$m = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F f(x,y,z)\,\mathrm{d}F$

6.2.2.1 BERECHNUNG VON DF FÜR SPEZIELLE FLÄCHENELEMENTE

- $z = f(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{y}_{v}) \Rightarrow$ Parameterdarstellung:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$|r_u \times r_v| = |\begin{vmatrix} \underline{i} & 1 & 0 \\ \underline{j} & 0 & 1 \\ \underline{k} & f_u & f_v \end{vmatrix}| = |\begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

wobei $\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $z = f(\underbrace{u}_{u}, \underbrace{\varphi}_{v}) \Rightarrow$ Parameterdarstellung:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ f_u \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = | \begin{vmatrix} \underline{i} & \cos v & -u\sin v \\ \underline{j} & \sin v & u\cos v \\ \underline{k} & f_u & f_v \end{vmatrix} | = \sqrt{u^2(1+f_u^2)+f_v^2} = \sqrt{r^2(1+f_r^2)+f_\varphi^2}$$

- Kugel mit MP 0 und Radius R
  Kugelkoordinaten: $r = R = const$
  Parameterdarstellung:
  $x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
  $y = R\sin\vartheta\sin\varphi$
  $z = R\cos\vartheta$
  $\varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} x = R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

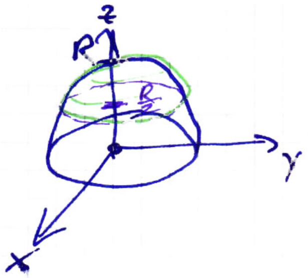
$$\underline{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

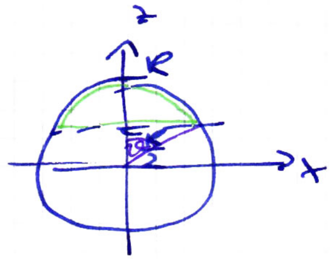
$$\Rightarrow |r_\vartheta \times r\varphi| = \cdots = \sqrt{R^4\sin^4\vartheta + R^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta} = R^2\sin\vartheta$$

Zusammenfassung:

Fläche	$\mathrm{d}F$
$z = f(x,y) \ldots$ expl. karth. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$z = f(r,\varphi) \ldots$ expl. zyl. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{r^2(1+f_r^2)+f_\varphi^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Speziell für Rotationsflächen $z = f(r,\varphi) = g(r),\ \varphi \in [0, 2\pi]$	$\mathrm{d}F = r\sqrt{1+(g'(r))^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Kugel MP 0, Radius R	$\mathrm{d}F = R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$

Bsp. 1: Man berechne den Schwerpunkt der Kugelteilfläche $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq \dfrac{R}{2}$ (Kugelkappe)





$\cos\vartheta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow$ Parameterdarstellung:
$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$
$x = R\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = R\cos\vartheta$
$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}$

- Inhalt von F: $[F] = \iint\limits_F \mathrm{d}F = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$

  $= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi R^2[-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi R^2$

- Aus Symmetriegründen gilt $x_s = y_s = 0$

- $z_s = \frac{1}{[F]} \iint\limits_F z\,\mathrm{d}F = \frac{1}{[F]} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \underbrace{R\cos\vartheta}_{z} \underbrace{R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta}_{\mathrm{d}F}$

  $= \frac{1}{\pi R^2} 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$

  $= 2R\left[\frac{\sin^2\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}R$

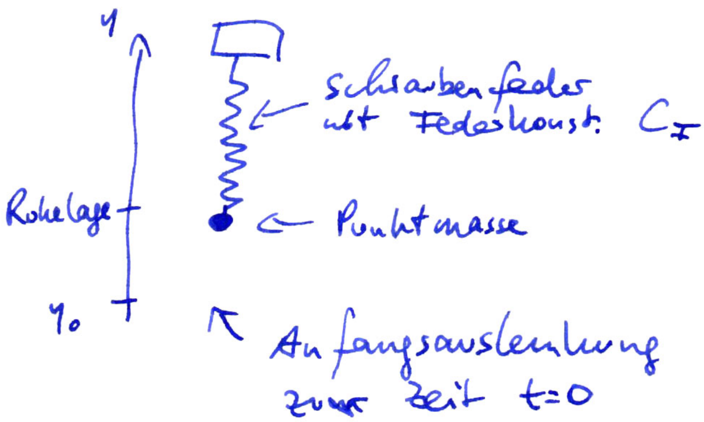
$\Rightarrow (x_s, y_s, z_s) = \left(0, 0, \frac{3}{4}R\right)$ ist der Schwerpunkt.

7 GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

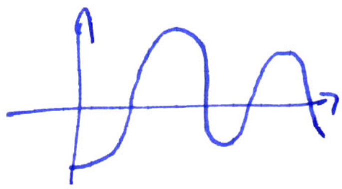
7.1 GRUNDBEGRIFFE

Vorbetrachtung:

Bsp. 1:



Lassen wir die Feder los, so kommt es zur Schwingung;



Gesucht ist Zeitverlauf $y = y(t)$ der Bewegung der Punktmasse. Dazu nutzen wir das Grundgesetz der Mechanik:

Kraft $=$ Masse $\cdot$ Beschleunigung

$K = m \cdot \ddot{y}$

bspw. freie (d.h. ohne äußere Kraft) und ungedämpfte (d.h. ohne Reibung) Schwingung:
$K = -C_F \cdot y$ (Hooksches Gesetz)
$\Rightarrow m \cdot \ddot{y} = -C_f \cdot y$ ($\leftarrow$ Differentialgleichung)
mit $y(0) = y_0$ (Startpunkt y_0) und $\dot{y}(0) = 0$ (Startgeschwindigkeit 0) ($\leftarrow$ Anfangsbedingungen).
Begriffe:
Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Funktion, die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält.
2 Grundarten:

(1) Gesuchte Funktion $y = y(x)$, d.h. EINE unabhängige Veränderliche $\Rightarrow$ GEWÖHNLICHE DGL

(2) Gesuchte Funktion $u = u(x, y)$ bzw. $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d.h. mindestens 2 unabhängige Veränderliche $\Rightarrow$ Ableitungen sind partielle Ableitungen $\Rightarrow$ PARTIELLE DGL

Bsp. 2: $y' = x^2$, gewöhnliche DGL für die Funktion $y = y(x)$.
Lösung: $y = \int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$ d.h. die Lösung ist eine Kurvenschar mit einem freien Parameter C.

Bsp. 3: $u_x = x \cdot y$ ... partielle DGL
Lösung: $u = \frac{x^2}{2}y + C(y)$
Bemerkung: Im folgenden nur gewöhnliche DGL.

Allgemeine Form einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung:

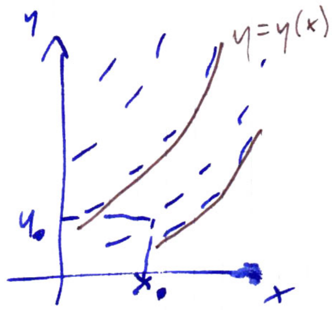
- implizit: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)} = 0$ (höchste vorkommende Ableitung $\Rightarrow$ Ordnung n)
- explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ (aufgelöst nach der höchsten Ableitung)
- Die ALLGEMEINE LÖSUNG ist eine Kurvenschar MIT n PARAMTERN (Integrationskonstanten)
- Anfangswertproblem (AWP): n zusätzliche Bedingungen:
  $y(x_0) = a_0, \; y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ (Anfangsbedingungen: Funktionswert und Ableitung an fester Stelle x_0 vorgegeben, siehe Bsp. 1)

7.2 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG

Allgemeine Form: $F(x, y, y') = 0$ (implizit) bzw. $y' = f(x, y)$ (explizit)

7.2.1 GEOMETRISCHE INTERPRETATION

Gegeben $y' = f(x, y), \; (x, y) \in B$
Richtungsfeld: In jedem Punkt $(x, y) \in B$ wird die Richtung mit dem Anstieg $f(x, y) = \tan\alpha$ markiert.



Gesucht: Kurven $y = y(x)$, die sich diesem Richtungsfeld anpassen, d.h. in jedem Punkt (x, y) den vorgegebenen Anstieg von $f(x, y)$ haben, also $y' = f(x, y)$.
(LÖSUNGSKURVEN DER DGL)

7.2.2 DGL MIT TRENNBAREN VARIABLEN

Typ: $y' = f(x) \cdot g(y)$	Bsp. 1: $y' = x \cdot y^2$, $y(1) = -2$
Lösungsmethode 1. Gleichung aufstellen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$
2. Trennung der Veränderlichen $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\,\mathrm{d}x$
3. beide Seiten integrieren: $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ $G(y) = F(x) + C$ ($G(y)$: Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$) (allgemeine Lösung, implizit)	$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\,\mathrm{d}x$ $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$
4. Falls möglich: Auflösen nach y $y = y(x) = \varphi(x, C)$ (allgemeine Lösung, explizit)	$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$
5. Untersuchen von $g(y) = 0$ (Nebenlösungen)	$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (erfüllt ebenfalls die DGL: Nebenlösung)
6. Bei AWP: AB erfüllen	$x = 1,\ y = -2$ einsetzen in DGL $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$ Lösung des AWP: $y = -\frac{2}{x^2}$

Diskussion:

(1) Rechtfertigung des Lösungsschritts 3:
$G(y) = F(x) + C$ nach x Ableiten liefert:
$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x)$$
$$\Rightarrow y' = f(x) \cdot g(y)$$
$\Rightarrow G(y) = F(x) + C$ erfüllt die DGL

(2) Spezialfälle:
$y' = f(x)$, d.h. $g(y) = 1$
$y' = g(y)$, d.h. $f(x) = 1$
$y' = \frac{f(x)}{h(x)}$, d.h. $g(y) = \frac{1}{h(y)}$

Bsp. 2: Ein Körper habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur $T_0 = 100°\mathrm{C}$. Die Temperatur der umgebenen Luft sei $T_L = 20°\mathrm{C}$ (=const.). Zur Zeit $t_1 = 10$ (min) hat sich der Körper auf $T_1 = 60°\mathrm{C}$ abgekühlt.

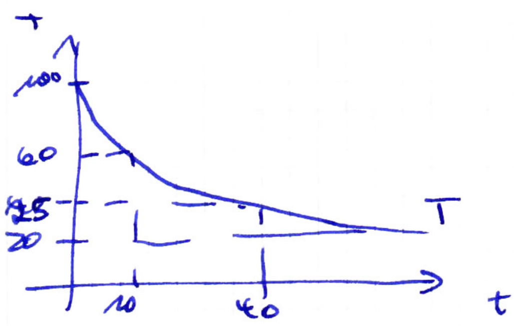
(a) Man ermittle die Temperatur T als Funktion der Zeit t.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t_2 beträgt die Temperatur des Körpers $25°\mathrm{C}$?

Lösung:

(a) Newtonsches Abkühlungsgesetz:
GESCHWINDIGKEIT DER ABKÜHLUNG ist proportional zur TEMPERATURDIFFERENZ ZU MEDIUM
$T = T(t) \ldots$ Temperatur [in $°\mathrm{C}$]
$t \ldots$ Zeit [in min]
$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot (T - T_L)$ mit $T(t) = T_0$ und $T(10) = T_1$
TdV, integrieren $\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_L} = \int \alpha \,\mathrm{d}t$
$\Rightarrow \ln|T - T_L| = \alpha t + C^*$
$\Rightarrow |T - T_L| = e^{\alpha t} \cdot e^{C^*}$
$\Rightarrow T - T_L = C \cdot e^{\alpha t}$ mit $C = \pm e^{C^*}$
Beachte: C ist zunächst $\neq 0$, da vorhandene NB $T - T_L = 0$ ergibt sich, wenn man $C = 0$ zulässt. Sie muss daher nicht extra angegeben werden.
Also ist die allgemeine Lösung: $T = T_L + C \cdot e^{\alpha t}$
AB liefern: $t = 0,\ T = 100 \Rightarrow C = 80$
Bestimmen von α: $t = 10,\ T = 60$
$60 = 20 + 80 \cdot e^{\alpha 10}$
$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2} < 0$
$\Rightarrow$ Lösung: $T = 20 + 80e^{-t\frac{1}{10}\ln 2}$

(b) Auflösung nach t liefert:
$t = -10 \frac{ln \frac{T-20}{80}}{\ln 2}$
$\overset{T=T_2=25}{=} -10 \frac{\ln \frac{5}{80}}{\ln 2} = 40[\mathrm{min}]$



7.2.3 LINEARE DGL 1. ORDNUNG

Normalform: $y' + a(x)y = h(x)$

- Falls $h(x) = 0$: homogen
- Falls $h(x) \neq 0$: inhomogen

Diskussion:

(1) Linear bezieht sich auf y und y' (1. Potenz: die Faktoren hängen höchstens von x ab. x, muss nicht linear sein). Nicht immer liegt die Normalform vor.
Bsp.:

- $y' + x^2y - \sin x = 0$: linear, inhomogen ($h(x) = \sin x$)
- $x^2y' = y$: linear, homogen
- $y' + e^{xy}y = \cos x$: nicht linear
- $y' \cdot y = e^x$: nicht linear (Umstellen würde zu $y' - \frac{1}{y}e^x$ führen)

(2) $h(x)$ heißt auch Störfunktion

(3) Lösungsmethode

a) Bestimmung der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y' + a(x)y = 0$ mittels Trennung der Variablen.

b) Bestimmung EINER partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung mittels Variation der Konstanten.

c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $y = y_h + y_p$

d) Falls AWP vorliegt: AB einsetzen.

Bsp. 3: $y' + \dfrac{1}{x}y = x$ ist linear und inhomogen

(a) zugehörige homogene DGL:
$y' + \dfrac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{x}y$
$\overset{TdV}{\Rightarrow} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C^*$
$\Rightarrow |y| = e^{-\ln|x|} \cdot e^{C^*} = \dfrac{1}{|x|} \cdot e^{C^*}$
$\Rightarrow y_h = C \cdot \dfrac{1}{x}$ mit $C = \pm e^{C^*}$
wie in Bsp. 2 zunächst $C \neq 0$, Nebenlösung $y_h = 0$ ergibt sich für $C = 0$. Also $C \in \mathbb{R}$ (beliebig).
y_h hat stets die Gestalt $\boxed{y_h = C \cdot \ldots}$

(b) Ansatz: $y_p = C(x) \cdot \dfrac{1}{x}$ (heißt Variation der Konstanten $C \rightsquigarrow C(x)$)
Damit $y_p' = C'(x)\dfrac{1}{x} - C(x)\dfrac{1}{x^2}$.
Einsetzen des Ansatzes (einschließlich y_p') in die inhomogene DGL:
$C'(x)\dfrac{1}{x} \underbrace{-C(x)\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}C(x)\dfrac{1}{x}}_{=0} = x$
$\Rightarrow C'(x) = x^2$
$\Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + K$ (setzen aber $K = 0$)
$\Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{3}x^3$
$\Rightarrow y_p = \dfrac{1}{3}x^3 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}x^2$

(c) $y = y_h + y_p = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{3}x^2$

7.2.4 WEITER DGLN 1. ORDNUNG

7.2.4.1 ÄHNLICHKEITSDIFFERENTIALGLEICHUNGEN

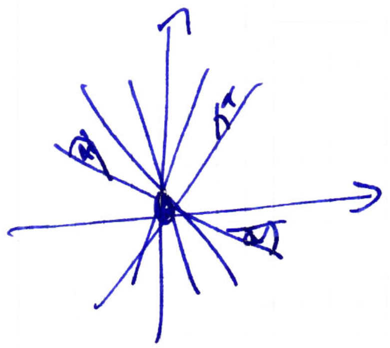
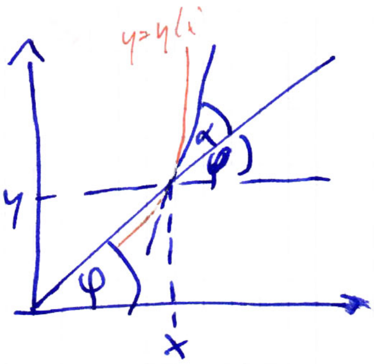
(a) Typ $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Lösung: Substitution $\dfrac{y}{x} = u = u(x)$, d.h. $y = u \cdot x$.
Also $y' = u'x + u$.
$\Rightarrow$ DGL mit trennbaren Variablen für $u = u(x)$
$\rightsquigarrow$ Lösen $\rightsquigarrow$ Rücksubstitution

(b) Typ $\boxed{y' = y(ax + by + c)}$

Lösung: Substitution $ax + by + c = u(x)$, d.h. $u' = a + by'$.
Also $y' = \dfrac{1}{b}(u' - a)$.
Dann weiteres vorgehen wie bei a.)

Bsp. 4: Gesucht sind Kurven $y = y(x)$, die alle vom Ursprung ausgehende Strahlen unter dem gleichen Winkel α schneiden (isogonale Trajektionen).

$$y' = \tan(\varphi + \alpha) = \frac{\tan\varphi + \tan\alpha}{1 - \tan\varphi\tan\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + \tan\alpha}{1 - \frac{y}{x}\tan\alpha} =: f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitution: $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u'x + u = \dfrac{u + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha}$

$$\Rightarrow u'x = \frac{u + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha} - u = \frac{u^2\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x = \frac{u^2 + 1}{\cot\alpha - u}$$

$$\overset{TdV}{\Rightarrow} \int \frac{\cot\alpha - u}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha \cdot \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) = \ln|x| + C_1$$

Rücksubstitution: $\cot\alpha \cdot \arctan\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + \ln|x| + C_1 = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C_1$

Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$, d.h. $\varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + k\pi$
$\Rightarrow \cot\alpha \cdot \varphi = \ln r + C_2$
$\Rightarrow r = C \cdot e^{\varphi\cot\alpha}$ mit $C = e^{-C_2}$
... ist die logarithmische Spirale

7.2.4.2 EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die DGL $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ mit $P_x = Q_y$ (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) heißt exakte DGL.
Lösung:
Unter den sogenannten Integrabilitätsbedingungen $P_y = Q_x$ existiert eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ (F ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt). Die allgemeine Lösung der exakten DGL ist dann die Kurvenschar $\boxed{F(x,y) = C}$ (Höhenlinien von F).

Bemerkung: Ist eine DGL in obiger Gestalt nicht exakt (d.h. $P_y \neq Q_x$), so gibt es oft einen integrierenden Faktor $M = M(x,y)$, so dass die DGL $P \cdot M + Q \cdot M \cdot y' = 0$ exakt wird.

7.3 LINEARE DGLN HÖHERER ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Allgemeine Form: $L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

BESTIMMUNG EINER ALLGEMEINEN LÖSUNG

... y_h der zugehörigen homogenen DGL $L(y) = 0$.

Satz 1: Die Gleichung $L(y) = 0$ besitzt n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist dann $y_h = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$

Diskussion:

(1) Die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ heißt (ein) Fundamentalsystem (FS) von Lösungen der homogenen DGL.

(2) Mit dem Ansatz $y_h = e^{\lambda x}$ erhält man die charakteristische Gleichung $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

Satz 2: Jede f-fache Nullstelle λ_0 des charakteristischen Polynoms liefert die folgenden Funktionen des FS:
λ_0 reell:
$e^{\lambda_0 x}, x \cdot e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda_0 x}$ (m Funktionen)
$\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) komplex (dann ist auch $\lambda - i\beta$ eine m-fache Nullstelle):
$e^{\lambda x}\cos(\beta x), xe^{\lambda x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\cos(\beta x)$
$e^{\lambda x}\sin(\beta x), xe^{\lambda x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\sin(\beta x)$ ($2m$ Funktionen)

Diskussion:

(1) Beispiele für die Zuordnung der Lösung der charakteristischen Gleichung $\rightarrow$ FS

Lösungen λ_k der char. Gl.	FS
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$	$\{1, e^{2x}, e^{-x}\}$
$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4,5} = 3$	$\{1, x, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$	$\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$
$\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm i$	$\{\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x\}$

(2) $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$
$\Rightarrow C_1 e^{(\lambda+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$
$= C_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + C_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$
$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_1^*} e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{C_2^*} ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$
(Dies erläutert die komplexe Lösung in Satz 2)

BESTIMMUNG EINER PARTIKULÄREN LÖSUNG

... der inhomogenen DGL
1. MÖGLICHKEIT: Variation der Konstanten (stets möglich)
2. MÖGLICHKEIT: Spezieller Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für häufig vorkommende Störfunktionen $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich

Satz 3:

(1) Die Störfunktion h habe die Gestalt $h(x) = e^{\alpha x}(p_1(x)\cos(\beta x) + p_2(x)\sin(\beta x))$ wobei p_1 und p_2 Polynome mit maximalem Grad r sind.

(2) Sei $\varrho \geq 0$ die Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$
FALL 1: $\varrho = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha + i\beta$ ist keine Nullstelle)
$\Rightarrow L(y) = h(x)$ besitzt Partikulärlösung der Form
$\boxed{y_p = e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))}$
wobei Q_1, Q_2 Polynome vom Grad r mit unbestimmten Koeffizienten sind.
FALL 2: $\varrho > 0$ (Resonanzfall)
Dann hat y_p die Form
$\boxed{y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \cdot x^{\varrho}}$

Diskussion:

(1) Beispiel für die Zuordnung $h(x) \rightsquigarrow$ Ansatz für y_p

Lösung λ_i der char. Gl.	$h(x)$	α	β	$\alpha + i\beta$	ϱ	r	Ansatz für y_p
$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = -1$	$x^2 + 1$	0	0	0	3	2	$\underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{Q_1(x)} x^3 = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
$\lambda_1, \lambda_2 = 3$	$4e^{-x}$	-1	0	-1	0	0	Ae^{-x}
$\lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_3 = 3$	$\sin(3x)$	0	3	$3i$	0	0	$A\cos(3x) + B\sin(3x)$
$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 0$	$x^3 e^{-2x}$	-2	0	-2	1	3	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-2x}x$

(2) Falls die Störfunktion die Form $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots$ hat, so wählt man den Ansatz $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots$ mit y_{p_i} ist Partikulärlösung von $L(y) = h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$

LÖSUNG DER DGL

$\boxed{y = y_h + y_p}$

Bsp. 1: $y'' - 3y' = -\sin(3x)$

(a) allgemeine Lösung:
char. Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$
$\Rightarrow$ FS ist $\{1, e^{3x}\}$
$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 e^{3x}$

(b) partikuläre Lösung:
$h(x) = -\sin(3x) \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 3 \Rightarrow \alpha + i\beta = 3i \Rightarrow \varrho = 0,\ r = 0$ ($3i$ keine Lösung der char. Gl.)
Ansatz:
$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$
$y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$
$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$
Einsetzen in inhomogene DGL:
$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) = -\sin(3x)$
Koeffizientenvergleich:
$\cos(3x)$: $-9A - 9B = 0 \Rightarrow A = -B$
$\sin(3x)$: $-9B + 9A = -1 \Rightarrow -18B = -1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{18},\ A = -\dfrac{1}{18}$
$\Rightarrow y_p = -\dfrac{1}{18}\cos(3x) + \dfrac{1}{18}\sin(3x)$

(c) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^{3x} - \dfrac{1}{18}\cos(3x) + \dfrac{1}{18}\sin(3x)$

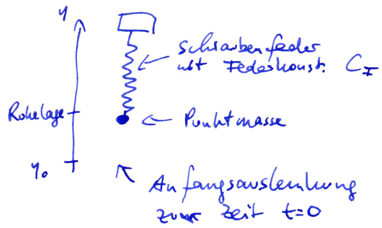
Bsp. 2: $y^{(4)} - 3y''' = 36x^2 - 5$

(a) char. Gleichung: $\lambda^4 - 3\lambda^3 = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 3$
$\Rightarrow FS = \{1, x, x^2, e^{3x}\}$
$y_h = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^3x$

(b) $h(x) = 36x^2 - 5$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 \Rightarrow \varrho = 3$
Ansatz:
$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\underbrace{x^3}_{x^\varrho}$
$= Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
$y_p' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2$
$y_p'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx$
$y_p''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C$
$y_p^{(4)} = 120Ax + 24B$
Einsetzen:
$120Ax + 24B - 180Ax^2 - 72Bx - 18C = 36x^2 - 5$
Koeffizientenvergleich:
x^2: $-180A = 36 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{5}$
x^1: $120A - 72B = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{3}$
x^0: $24B - 18C = -5 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{6}$
$\Rightarrow y_p = -\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3$

(c) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^3x - \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3$

Bsp. 3: Anwendung: Federschwingungsgleichung



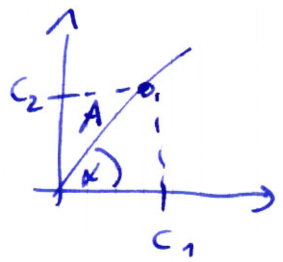
Grundgesetz der Mechanik: $m\ddot{y} = K = K(y, \dot{y}, t)$

$$m\ddot{y} = -\underbrace{\alpha\dot{y}}_{\substack{\text{Reibungskraft}\\\text{proportional}\\\text{zur Geschw. }\dot{y}}} - \underbrace{c_F y}_{\substack{\text{Rückzugskraft}\\\text{proportional}\\\text{zur Auslenkung }y}} + \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}}$$

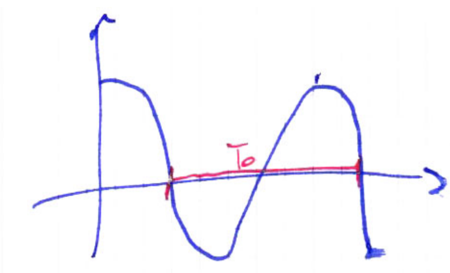
mit $\gamma := \frac{\alpha}{2m} > 0$ wobei $\omega_0^2 := \frac{c_F}{m}$ und $h(t) = \frac{F(t)}{m}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = h(t)}$ mit AB $y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = v_0$

- FALL 1: $h(t) = 0$ (keine äußere Kraft, freie Schwingung)
  DGL: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ (ist homogen, d.h. allgemeine Lösung $y = y_h$)
  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
  - FALL 1A: $\gamma = 0$ (keine Reibung, freie und ungedämpfte Schwingung)
    $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$
    $\Rightarrow FS = \{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$
    $\Rightarrow y = y_h = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$ mit

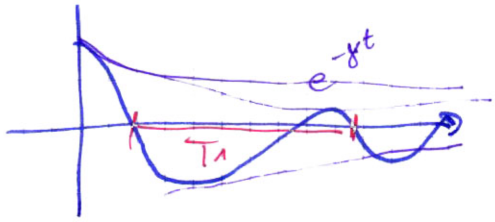
    

    $C_1 = A\cos\varphi,\ C_2 = A\sin\varphi$ folgt:
    $y = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$
    Mit AB lassen sich C_1 und C_2 (bzw. A und φ) berechnen, z.B. $v_0 = 0 \Rightarrow C_1 = y_0,\ C_2 = 0$
    $\Rightarrow y = y_0\cos(\omega_0 t)$
    $T := \frac{2\pi}{\omega_0}$ ... Schwingdauer, ω_0 ... Eigenfrequenz

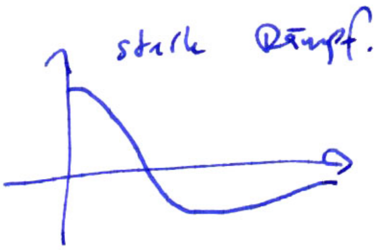
    

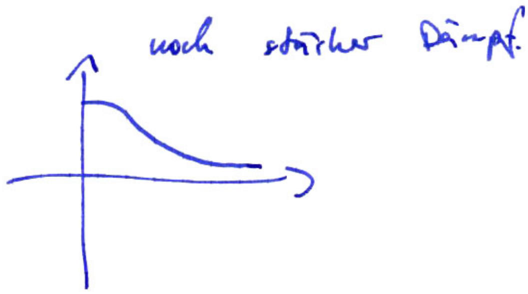
  - FALL 1B: $0 < \gamma < \omega_0$ (kleine Dämpfung, freie gedämpfte Schwingung)
    $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1}\, i$
    $\Rightarrow FS = \{e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t, e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)\}$

$y = y_h = (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t))e^{-\gamma t}$
$\omega_1 < \omega 0 \Rightarrow T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} > T_0$:



- FALL 1C: $\gamma \geq \omega_0$ (starke Dämpfung)
  $\lambda_{1,2}$ reell und negativ:





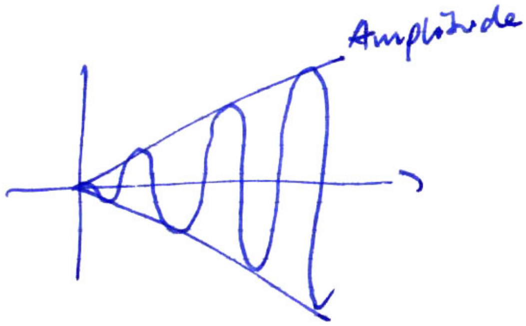
  (z. B. möglich, wenn $sgn(v_0 y_0) < 0$ [Anm.: $sgn(x)$: Vorzeichen von x])

FALL 2: äußere Kraft $F(t)$ existiert $\Rightarrow$ erzwungene Schwingung
hier nur Fall $\gamma = 0$, $h(t) = a\sin(\omega_0 t)$:
DGL: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = a\sin(\omega_0 t)$
keine Dämpfung, periodische Kraft mit Frequenz = Eigenfrequenz ω_0

(a) $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$
$\Rightarrow y_h = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ (wie in 1a)

(b) y_p ermitteln:
$h(t) = a\sin(\omega_0 t)$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega_0 \Rightarrow \alpha + i\beta = i\omega_0 \Rightarrow \varrho = 1$ (Resonanzfall)
Ansatz:
$y_p = (A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t))t$
Setzen wir dies in die inhomogene DGL ein und nutzen den Koeffizientenvergleich, ergibt sich $A_1 = -\dfrac{a}{2\omega_0}$, $A_2 = 0$.
$\Rightarrow y_p = -\dfrac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$

(c) Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) - \dfrac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$



Resonanz! Wachsende Amplitude mit $\dfrac{at}{2\omega_0}$ $\Rightarrow$ Resonanzkatastrophe!