Fakultät Informatik/Mathematik

Lehrstuhl für Stochastik

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Spicker

MATHE 2

Mitschrift von

Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von

Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

5. Mai 2017

INHALTSVERZEICHNIS

1 Folgen und Reihen **2**
1.1 Berechnen 2
1.2 Rechenregeln 2
1.3 Konvergenz 2
1.4 Potenzreihen 3

2 Grenzwerte **4**
2.1 Stetig 4

3 Differentiation **5**
3.1 Regeln 5
3.2 Taylor 5
3.2.1 Taylor-Reihe 5
3.3 Kurvendiskussion 6
3.4 Kurvendarstellung 6
3.4.1 Tangenten + Normalen 6
3.4.2 Krümmung 7
3.4.3 Tangente+Krümmung im Raum 7
3.4.4 Newton zur Nullstellenbestimmung 7

4 Integration **9**
4.1 Partialbruchzerlegung 9
4.2 Numerische Integration 10
4.3 Uneigentliche Integral 10
4.3.1 Unendliches Intervall 10
4.3.2 Unbeschränkter Integrand 10
4.4 Anwendungen 11
4.4.1 Flächeninhalte 11
4.4.2 Bogenlänge 11
4.4.3 Rotationsvolumen 11
4.4.4 Mantelflächen 11
4.4.5 Fourier-Reihe 12
4.5 Mehrere Veränderliche 12
4.5.1 Koordinatentransformation 12
4.5.2 Oberflächen 12

5 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher **14**
5.1 Fehlerrechnung 14
5.2 Richtungsableitung 14
5.2.1 Tangentialebene 14
5.3 Extrema 14
5.3.1 Ohne Nebenbedingung 14
5.3.2 Mit Nebenbedingung 15

6 Differentialgleichungen **16**
6.1 Mit trennbaren Variablen 16

6.2 Lineare DGL 1. Ordnung 16
6.3 Ähnlichkeits-DGL 17

1 FOLGEN UND REIHEN

1.1 BERECHNEN

$$\sum_{0}^{n} a \cdot q^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

oder $\sum_{0}^{n} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$ für $|q| < 1$ (bei $|q| > 1$: divergent!) Darauf achten:

- auf Untergrenze 0 achten:
  $\sum_{1}^{5} a^n = \sum_{0}^{5} a^n - 1$ (Summe „erweitern“ und Erweitertes abziehen)
  oder:
  $\sum_{1}^{5} a^n = \sum_{0}^{4} a^{n+1}$ (n entsprechend neuer Grenze anpassen)

1.2 RECHENREGELN

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konvergent mit Summe a und b, dann gilt:
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ die Glieder a_n lassen sich beliebig umordnen.
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent mit Summen a und b, dann gilt:
  - $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = a \cdot b \qquad \left(= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i} \quad \text{Cauchy-Produkt}\right)$

1.3 KONVERGENZ

(1) notwendige Bedingung:Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die entsprechende Folge eine 0-Folge $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

(2) mit hinreichendem Kriterium prüfen:

- Vergleich:
  Wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ und $\sum b_n$ konvergent, dann auch $\sum a_n$ konv. (b_n ist konv. Majorante)
  Wenn $0 \leq b_n \leq a_n$ und $\sum b_n$ divergent, dann auch $\sum a_n$ div. (b_n ist div. Minorante)
  Vergleichsreihen:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \lambda > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \lambda \leq 1 \end{cases}$$
  weitere siehe S. 74, S.77 Merziger
- Quotientenkriterium
  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1 & \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \text{ absolut konvergent} \\ > 1 & \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \text{ divergent} \\ = 1 & \text{keine Aussage} \end{cases}$$
- Wurzelkriterium
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \text{ absolut konvergent} \\ > 1 & \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \text{ divergent} \\ = 1 & \text{keine Aussage} \end{cases}$$
- Leibnitz
  Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn der Betrag der Folge eine 0-Folge ist.

1.4 POTENZREIHEN

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$: Potenzreihe mit Mittelpunkt x_0

- Wenn $r := \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert, dann:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-x_0| > r \end{cases}.$$
  r: Konvergenzintervall um x_0 (darf auch 1 sein)
- Intervall: $(x_0 - r, x_0 + r)$ (wenn $r = 0$, dann $\varnothing$)
- Konvergenzbereich: $[x_0 - r, x_0 + r)$ ($[,], (,)$ je nach dem, ob Randpunkt konvergiert. Wenn $r = 0$, dann $[r]$)
  Wenn $r = \infty$: beständige Konvergenz
- Radius im Abhängigkeit von a_n: Wenn $a_n \leq f(n)$, dann $r \geq \lim \ldots$.

Wichtige Reihen:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$ (geometrische Reihe)
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$
weitere siehe Merziger F3

2 GRENZWERTE

wichtige Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$
$\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht.
weitere siehe Merziger F3

- Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \searrow x_0}$
- Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \nearrow x_0}$
- Substituieren:
  wenn bspw. Term in $\sin$ o.ä.
- Term erweitern zum vereinfachen (bspw. binom. Formel): $a \cdot \frac{b}{b}$
- l'Hopital: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ für $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ (siehe Merziger S. 93)
  Achtung: Wenn l'Hopital keine Lösung liefert: bspw. in Ursprungsgleichung etwas ausklammern.
  Umformung von Gleichungen um l'Hopital anwenden zu können:
  $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ (oder umgekehrt)
  $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$
  $f^g = \exp(g \cdot \ln f)$

2.1 STETIG

Funktion ist stetig, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich mit dem Grenzwert an dem Punkt.

- hebbar Stetig: wenn Grenzwert im Punkt nicht existiert, aber links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich (bsp.: $\frac{\sin x}{x}$ an Stelle 0) sind.
- endlicher Sprung: wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht gleich sind, Grenzwert an der Stelle aber existiert.

3 DIFFERENTIATION

3.1 REGELN

- $(A\,f + B\,f)' = A\,f' + B\,f'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$
- $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$
- $(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$

3.2 TAYLOR

An der Stelle x_0 bis zum n-ten Grad:
$P_n(x) = f + \frac{f'}{1!}(x - x_0) + \frac{f''}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$
$R_n = f - P_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \xi = x_0 + \vartheta(x - x_0) \quad \vartheta \in (0,1)$

Fehler-Näherung am Punkt x_1 mittels Restglied:
Maximale Abweichungen:

- $R_{n1}\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}$
- $R_{n2}\frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}$

Wert liegt damit zwischen $P_n + R_{n1}$ und $P_n + R_{n2}$.

Abweichung und relativer Fehler:
absoluter Fehler (Ungenauigkeit): $P_n - f(x_0)$ relativer Fehler: $\frac{P_n - f(x_0)}{f(x_0)}$

3.2.1 TAYLOR-REIHE

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ wenn f beliebig oft diffbar und $R_n = 0$

3.3 KURVENDISKUSSION

- Nullstellen
  n-ter Ordnung: $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^n(x_0) \neq 0$

- Extremstellen $f'(x_0) = 0$
  Hinreichend:
  mit n gerade (f'', ...): $f^{(n)} \begin{cases} < 0 & \text{Maximum} \\ > 0 & \text{Minimum} \end{cases}$
  (Wenn zusätzlich $f' = 0$, dann Flachstelle)
  oder: Wenn $f'(x_0)$ Vorzeichen wechselt: $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - & \text{lokales Maximum} \\ \text{von } - \text{ auf } + & \text{lokales Minimum} \\ \text{kein VZW} & \text{Horizontal-Wendestelle} \end{cases}$

- Wendestellen $f' = f'' = 0$ (konvex/konkav von oben betrachtet)
  mit n ungerade (f''', ...): $f^{(n)} \begin{cases} < 0 & \text{konvex} \to \text{konkav} \\ > 0 & \text{konkav} \to \text{konvex} \end{cases}$
  oder: Wenn f'' Vorzeichen wechselt: $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - & \text{konvex} \to \text{konkav} \\ \text{von } - \text{ auf } + & \text{konkav} \to \text{konvex} \\ \text{kein VZW} & \text{Flachstelle} \end{cases}$

3.4 KURVENDARSTELLUNG

- Parameter in explizite Darstellung:
  Parameter t eliminieren (Gleichungen miteinander verrechnen: $x + y = x(t) + y(t)$ [wenn sich damit das t weg hebt] oder eine Gleichung nach t auflösen und in die andere einsetzen: $y = y(t(x))$)

- Explizite in Polardarstellung:
  $x = r \cos \varphi$
  $y = r \sin \varphi$

- Explizite in Parameterdarstellung:
  $x = t$, dann ist $y = y(t)$

- Polar in Parameterdarstellung:
  $x = r(\varphi) \cos \varphi$
  $y = r(\varphi) \sin \varphi$

3.4.1 TANGENTEN + NORMALEN

Tangentengleichungen:
$y = y_0 + m(x - x_0)$
$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{t} \quad s \in \mathbb{R}$
Normalengleichungen:
$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$
$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{n} \quad s \in \mathbb{R}$

Allgemein: $m_n = -\frac{1}{m_t}$

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$	$P_0 = (x_0, f(x_0))$	$P_0 = (x(t_0), y(t_0))$	$P_0 = (r(\varphi_0) \cdot \cos\varphi_0,\ r(\varphi_0) \cdot \sin\varphi_0$
Anstieg $m = \tan\alpha$ in P_0	$f'(x_0)$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\frac{r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0}{r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0}$
Tangenten-vektor $\underline{t}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$
Normalen-vektor $\underline{n}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 - r(\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

3.4.2 KRÜMMUNG

$K\ldots$ Krümmungskreis (Schmiegkreis)
$\varkappa$ (Kappa)... Krümmung
$\varrho\ldots$ Krümmungsradius mit $\varrho = \frac{1}{|\varkappa|}$

$M\ldots$ Mittelpunkt des Krümmungskreises $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{n}{|\underline{n}|}$

Kurve	$y = f(x),\ x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t),\ t \in I$	$r(\varphi),\ \varphi \in I$
Krümmung $\varkappa$ in Punkt $P = (x, y)$	$\varkappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

3.4.3 TANGENTE+KRÜMMUNG IM RAUM

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in I,\ \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tangente in t_0:

$$\underline{g}(s) = \underline{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

Krümmung:
$\varkappa = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$ (Ableitung Vektor: jede „Zeile“ ableiten)

3.4.4 NEWTON ZUR NULLSTELLENBESTIMMUNG

Rekursiv berechnet:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(n)}{f'(n)}$

n	x_n
0	Startwert (Abschätzung, wo NS liegen könnte)
1	$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2	$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

4 INTEGRATION

- Substitution:
  Substituiere im Integral $\int f(g) \cdot g' \, \mathrm{d}x$ $u = g$, dann ist $\mathrm{d}x = \frac{1}{g'} \mathrm{d}u$. Damit kürzt sich g' weg und das Integral kann gelöst werden. Am Schluss Rücksubstituieren.
  Bei bestimmten Integralen:
  Entweder Grenzen ersetzen (Grenzen in u einsetzen) oder Grenzen erst nach lösen und Rücksubstituieren auf Stammfunktion anwenden.

- lineare Substitution:
  $\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x$, substituiere $u = ax + b$ und damit $\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{d}u$

- partielle Integration:
  $\int fg' \, \mathrm{d}x = fg - \int f'g \, \mathrm{d}x$
  Dann optimal, wenn f' nicht mehr von x abhängig ist oder sich mit g wegkürzt ($\rightarrow f = \ln x$).
  Dann entweder Integral berechenbar, oder wenn $f'g = fg'$: $\int fg' = \frac{1}{2} fg$.

4.1 PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Zum lösen von Integralen mit Brüchen

- Bruch muss unecht gebrochen sein. Wenn nicht ggf. mit Polynomdivision aufteilen: $a + \frac{r}{q}$
  (Polynom+echt gebrochener Term)
  Polynomdivision (Erinnerung):
  $(x^3 + 2x^2 + 1) \div (x+1) = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x+1}$
  $-(x^3 + x^2)$
  $\vdots$

- Nullstellen des Nenners bestimmen und getrennt aufschreiben (ggf. reell und komplex):
  $(x - x_{01})^n (x - x_{02})^n \cdots (x^2 + p_1 x + q_1)^m \cdots$ (Nullstellen jeweils mit Mehrfachheit n, bzw. m)

- PBZ:
  $\begin{cases} (x-\alpha)^k \\ (x^2+px+q)^m \end{cases}$ entspricht jeweils $\begin{cases} \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^k} \\ \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m} \end{cases}$
  Bsp.: $f(x) = \frac{x^2+4}{(x-1)^3 (x+5)(x^2+2x+2)^2}$
  $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+5} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+2} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+2)^2}$

- Ermittlung der Koeffizienten entweder durch Multiplikation mit Nenner vom Ansatz. Lösen durch wahlweise:
  - Einsetzen der reellen Nullstellen

- Koeffizientenvergleich

- Integration der Summanden

4.2 NUMERISCHE INTEGRATION

Simpson:
$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right)$
Bsp.: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
$n = 4,\ h = 0,25$

k	x_k	y_0, y_n	y_{2j+1}	y_{2j}
0	0	1		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

$S_4(0,25) = \frac{0,25}{3}(1,367879 + 4 \cdot 1,509196 + 2 \cdot 0,778801)$
$h = \frac{\text{obere Grenze} - \text{untere Grenze}}{n}$

4.3 UNEIGENTLICHE INTEGRAL

4.3.1 UNENDLICHES INTERVALL

Uneigentliche Grenzen mit Parameter versehen und die berechnete Funktion mit $\lim$ lösen. Wenn beide Integralgrenzen uneigentlich sind, dann Integral aufteilen:
$\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x := \lim_{B \to \infty} \int_a^B f\,\mathrm{d}x$
$\int_{-\infty}^\infty f\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^c f\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f\,\mathrm{d}x$ (c beliebig, bspw. $c = 0$).

4.3.2 UNBESCHRÄNKTER INTEGRAND

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$
falls Unendlichkeitsstelle x_0 im Inneren von $[a, b]$ liegt:
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Bsp.: $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 4$

4.4 ANWENDUNGEN

4.4.1 FLÄCHENINHALTE

mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$:

$$F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $a < b < c$:

$$F = \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $f(x)$: obere Funktion und $g(x)$: untere Funktion:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

4.4.2 BOGENLÄNGE

Kurvendarstellung	Bogenlänge s, Bogenelement $\mathrm{d}s$
$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}$
$y = f(x),\ x \in [a, b]$	$s = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s}$
$x = g(y),\ y \in [c, d]$	$s = \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}s}$
$r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}s}$

Raumkurven:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

4.4.3 ROTATIONSVOLUMEN

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta (y(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

4.4.4 MANTELFLÄCHEN

mit jeweils $\mathrm{d}s$ aus Tabelle Bogenlänge

$M_x = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}s = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ bzw.

$M_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y$ bzw. bei Parameter:

$$M_x = 2\pi \int_K y\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_K y\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t$$

4.4.5 FOURIER-REIHE

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Ist f symmetrisch gilt (vereinfachend):

f gerade	$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$, $a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x$, $b_k = 0$
f ungerade	$a_0 = 0$, $a_k = 0$, $b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x$

4.5 MEHRERE VERÄNDERLICHE

Volumen V unter $z = f(x,y) \geq 0$ über B	$V = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$
Flächeninhalt $[B]$ von B	$[B] = \iint\limits_B 1\,\mathrm{d}b = \iint\limits_b \mathrm{d}b$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s) von B	$x_s = \frac{1}{[B]}\iint\limits_B x\,\mathrm{d}b,\ y_s = \frac{1}{[B]}\iint\limits_B y\,\mathrm{d}b$
Integralmittelwert m von f auf B	$m = \frac{1}{[B]}\iint f(x,y)\,\mathrm{d}b$

$\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ (Polar)

4.5.1 KOORDINATENTRANSFORMATION

$$I = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \iint\limits_{B'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Beispiel Polarkoordinaten: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

4.5.2 OBERFLÄCHEN

Flächeninhalt $[F]$ von F	$[F] = \iint\limits_F \mathrm{d}F$
geometrischer Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s)	$x_s = \frac{1}{[F]}\iint\limits_F x\,\mathrm{d}F$ $y_s = \frac{1}{[F]}\iint\limits_F y\,\mathrm{d}F$ $z_s = \frac{1}{[F]}\iint\limits_F z\,\mathrm{d}F$
Integralmittelwert m von f auf F	$m = \frac{1}{[F]}\iint\limits_F f(x,y,z)\,\mathrm{d}F$

Berechnung von $\mathrm{d}F = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Fläche	$\mathrm{d}F$
$z = f(x,y) \ldots$ expl. karth. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$z = f(r,\varphi) \ldots$ expl. zyl. Darstellung	$\mathrm{d}F = \sqrt{r^2(1 + f_r^2) + f_\varphi^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Speziell für Rotationsflächen $z = f(r,\varphi) = g(r),\ \varphi \in [0, 2\pi]$	$\mathrm{d}F = r\sqrt{1 + (g'(r))^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Kugel MP 0, Radius R	$\mathrm{d}F = R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$

5 DIFFERENTIALRECHNUNG MEHRERER VERÄNDERLICHER

- Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$
- Kettenregel: $z = f(g(x,y), h(x,y))$:
  $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$
  $z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$
  Bsp.: $z = (x^2 + 3y^2)^{x+2y} \Rightarrow u = x^2 + 3y^2,\ v = x + 2y\ \Rightarrow\ z = f(u,v) = u^v$
- $f'(x) = -\dfrac{F_x}{F_y}$ (implizite Funktion)
  gilt, wenn $F = 0$ und $F_y \neq 0$
- Gradient ∇f: Vektor, in dem jede Zeile nach der jeweiligen Variablen abgeleitet ist.

5.1 FEHLERRECHNUNG

Gesamtfehler $S_f = |f_x(x_0, y_0, \dots)| \cdot S_x + |f_y(x_0, y_0, \dots)| \cdot S_y + \dots$ mit S_y jeweils die Messfehler der einzelnen Variablen und x_0 die gemessen Fehler

5.2 RICHTUNGSABLEITUNG

$\dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha$ (wenn Winkel gegeben)
$= \dfrac{f_x(x_0, y_0) \cdot s_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$ (wenn $\underline{s}$ gegeben)

5.2.1 TANGENTIALEBENE

$$\left(\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ F_y(\dots) \\ F_z(\dots) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

5.3 EXTREMA

5.3.1 OHNE NEBENBEDINGUNG

notwendige Bedingung $f'_x = 0$ und $f'_y = 0$

hinreichende Bedingung $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$: lokal extremal und mit $f_{xx} \begin{cases} < 0 & \text{lokal maximal} \\ > 0 & \text{lokal minimal} \end{cases}$

5.3.2 MIT NEBENBEDINGUNG

Lagrange-Funktion: $F(x, y, \lambda) = f + \lambda g$ mit f: Funktion und g: Nebenbedingung
Gleichungssytem $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_\lambda = 0$ lösen. Ergebnis sind Extrema.
Untersuchung, ob Maximum oder Minimum per geometr. Überlegung.

6 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

6.1 MIT TRENNBAREN VARIABLEN

Typ: $y' = f(x) \cdot g(y)$	Bsp. 1: $y' = x \cdot y^2$, $y(1) = -2$
Lösungsmethode 1. Gleichung aufstellen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$
2. Trennung der Veränderlichen $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\,\mathrm{d}x$
3. beide Seiten integrieren: $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ $G(y) = F(x) + C$ ($G(y)$: Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$) (allgemeine Lösung, implizit)	$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\,\mathrm{d}x$ $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$
4. Falls möglich: Auflösen nach y $y = y(x) = \varphi(x, C)$ (allgemeine Lösung, explizit)	$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$
5. Untersuchen von $g(y) = 0$ (Nebenlösungen) 6. Bei AWP: AB erfüllen	$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (erfüllt ebenfalls die DGL: Nebenlösung) $x = 1,\ y = -2$ einsetzen in DGL $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$ Lösung des AWP: $y = -\frac{2}{x^2}$

6.2 LINEARE DGL 1. ORDNUNG

Normalform: $y' + a(x)y = h(x)$

- Falls $h(x) = 0$: homogen
- Falls $h(x) \neq 0$: inhomogen

Lösung:

- y_h homogene Lösung mit $h(x) = 0$ (also trennbare Variablen) hat Art $y_h = C \cdot \ldots$

- y_p partikuläre Lösung. Ansatz $y_p = C(x) \cdot a(x)$, damit y' berechnen und in Ursprungsgleichung einsetzen. Damit wird $C(x)$ berechnet, was dann wieder in y_p eingesetzt werden kann und zum Ergebnis führt.
- $y = y_h + y_p$

6.3 ÄHNLICHKEITS-DGL

(a) Typ $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$
Lösung: Substitution $\frac{y}{x} = u = u(x)$, d.h. $y = u \cdot x$.
Also $y' = u'x + u$.
$\Rightarrow$ DGL mit trennbaren Variablen für $u = u(x)$
$\rightsquigarrow$ Lösen $\rightsquigarrow$ Rücksubstitution

(b) Typ $\boxed{y' = y(ax + by + c)}$
Lösung: Substitution $ax + by + c = u(x)$, d.h. $u' = a + by'$.
Also $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$.
Dann weiteres vorgehen wie bei a.)