Fakultät Informatik/Mathematik

Lehrstuhl für Stochastik

HOCHSCHULE FÜR
TECHNIK UND WIRTSCHAFT
DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Spicker

STOCHASTIK

Mitschrift von

Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von

Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

5. Mai 2017

1 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1.1 EREIGNISSE UND WAHRSCHEINLICHKEIT

1.1.1 WAHRSCHEINLICHKEIT

Regeln:

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$
  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

1.1.2 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

- Falls A und B disjunkt, gilt $\mathbb{P}(A|B) = 0$
- $\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)}$
- $\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B)}$
- Multiplikationssatz:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)}$$

- Mit Bedingung:
  - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
  - $B_i \cap B_j = \varnothing$ für $i \neq j$
  - $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$

  gilt totale WK:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

Anwendung: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$

und Satz von Bayes:

$$\boxed{\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}}$$

1.1.3 UNABHÄNGIGKEIT

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

1.2 ZUFALLSVARIABLEN

1.2.1 VERTEILUNGSFUNKTION

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad \boxed{F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)}$$

1.2.2 DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVARIABLE

Dichtefunktion:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(\leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

1.2.3 ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ

Diskret:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = \sum_i x_i \cdot f(x_i)}$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_i = \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 f(x_i)}$$

Stetig:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Allgemein:

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

- $\boxed{\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X)}$
- $\boxed{\operatorname{Var}(a + bX) = b^2 \operatorname{Var} X}$

1.2.4 KOVARIANZ UND UNABHÄNGIGKEIT

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ die KOVARIANZ von X und Y.
- $\varrho_{X,Y} := \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$ der KORRELATIONSKOEFFIZIENT.
- X und Y UNKORRELIERT, wenn $\varrho_{X,Y} = 0$ (also wenn $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$)
- X und Y unabhängig $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}$
- $\boxed{\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)}$
- $\boxed{\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm \mathrm{Cov}(X,Y)}$
- $\boxed{\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)}$
- $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)}$

1.3 SPEZIELLE VERTEILUNGEN

1.3.1 SPEZIELLE DISKRETE VERTEILUNGEN

1.3.1.1 BERNOULLI VERTEILUNG

Genau 2 Werte!

- $\mathbb{P}(X=1) = p,\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$ und $X \sim \mathrm{Ber}(p)$
- Erwartungswert: $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq$
- Standardabweichung: $\sigma_X = \sqrt{pq}$

1.3.1.2 BINOMIALVERTEILUNG

$$p_i = \mathbb{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

- $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$
- Erwartungswert: $\mathbb{E}(X) = np$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

1.3.1.3 DISKRETE GLEICHVERTEILUNG

$$\mathbb{P}(X=x_1) = \cdots = \mathbb{P}(X=x_n) = \frac{1}{n}$$

- $X \sim U(T)$
- Erwartungswert: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$
- faire Münze, fairer Würfel, ...

1.3.1.4 HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

$$p_m := \mathbb{P}(X = m) = \frac{\binom{M}{n}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

- $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$
- Erwartungswert und Varianz:
  $\mathbb{E}(X) = n\dfrac{M}{N}$ $\mathrm{Var}(X) = n\dfrac{M}{N}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$
- Stichprobe ohne Zurücklegen (bspw. Qualitätskontrolle, Lotto)
  - N Objekte, davon M mit bestimmten Merkmal (bspw. Ausschuss, Gewinnzahl)
  - n Objekte werden entnommen
  - X ... Anzahl der Objekte unter den n entnommenen, die das Merkmal besitzen

$$\Rightarrow X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$$

1.3.1.5 GEOMETRISCHE VERTEILUNG

Kann nur die Werte $1, 2, \dots$ annehmen.

$$p_m := \mathbb{P}(X = m) = p(1-p)^{m-1} \quad m = 1, 2, \dots$$

- $X \sim \mathrm{Geo}(p)$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- Anwendung: Anzahl der Versuche BIS DER ERSTE ERFOLG EINTRITT, bei hintereinander ausführen von unabhängigen identischen Bernoulli Zufallsexperimenten.

1.3.1.6 POISSON-VERTEILUNG

Kann nur die Werte $1, 2, \dots$ annehmen.

$$p_m := \mathbb{P}(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$
- Erwartungswert: $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
- Anwendung: Bedientheorie, Zuverlässigkeitstheorie
  - Anzahl der Kunden pro Zeiteinheit
  - Anzahl der Störungen im Produktionsprozess eines Betriebs pro Zeiteinheit

1.3.2 SPEZIELLE STETIGE VERTEILUNGEN

1.3.2.1 STETIGE GLEICHVERTEILUNG

$$\mathbb{P}(X \in J) = \frac{|J|}{|I|}$$

- $X \sim U(I)$
- Sei $a < b$. Ein Intervall I kann die Form $(a,b),\ [a,b],\ [a,b)$ oder $(a,b]$ haben. Dann gilt $|I| = b - a$. Ist I von dieser Form, so gilt:
- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$
- Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

1.3.2.2 NORMALVERTEILUNG

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

1.3.2.3 EXPONENTIALVERTEILUNG

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Anwendung: Bedientheorie, Zuverlässigkeitstheorie, Verteilung von Zeitdauern wie Lebenszeiten, Reperaturzeiten, Wartezeiten, . . .

1.3.2.4 χ^2-VERTEILUNG

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

- $X \sim \chi^2$(n)
- $\mathbb{E}(X) = n$, $\mathrm{Var}(X) = 2n$
- Statistik, insbesondere Testtheorie

1.3.2.5 T-VERTEILUNG

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

- $X \sim t(n)$
- falls $n > 1$: $\mathbb{E}(X) = 0$, für $n = 1$ existiert $\mathbb{E}(X)$ nicht
- falls $n > 2$: $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-1}$, für $n = 1, 2$ existiert $\mathrm{Var}(X)$ nicht
- Statistik, insbesondere Testtheorie

1.3.2.6 F-VERTEILUNG

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $X \sim F(m, n)$
- falls $n > 2$: $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2}$, für $n = 1, 2$ existiert $\mathbb{E}(X)$ nicht
- falls $n > 4$: $\mathrm{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, für $n = 1, 2, 3, 4$ existiert $\mathrm{Var}(X)$ nicht
- Statistik, insbesondere Testtheorie

1.4 GRENZWERTSÄTZE

Tschebyschew-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

1.4.1 DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

Rechnung bspw.:

$$\mathbb{P}(S \leq ?) = \mathbb{P}(S - \mathbb{E}S \leq ? - \mathbb{E}S)$$

Moivre-Laplace:

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

2 STATISTIK

2.1 DESKRIPTIVE STATISTIK

2.1.1 GRUNDBEGRIFFE

2.1.2 EINDIMENSIONALES DATENMATERIAL

2.1.2.1 STICHPROBENFUNKTIONEN

- (Stichproben-)Mittelwert:
$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$
- (Stichproben-)Streuung/Varianz
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
- (Stichproben-)Standardabweichung
$$S = \sqrt{S^2}$$
- Variationskoeffizient
$$V = \frac{S}{\overline{X}}$$
- α-Quantil $\widetilde{X}_\alpha$ mittels
$$\widetilde{X}_\alpha := \begin{cases} X_{(k)} & \text{falls } \alpha n \text{ keine ganze Zahl ist und} \\ & k \text{ kleinste ganze Zahle größer } \alpha n. \\ \frac{1}{2}(X_{(\alpha n)} + X_{\alpha n+1)}) & \text{falls } \alpha n \text{ ganzzahlig.} \end{cases}$$
- Median $:= \widetilde{X}_{0,5}$
- Inter-Quartilsabstand (Inter-Quartil-Range)
$$IQR = \widetilde{X}_{0,75} - \widetilde{X}_{0,25}$$

2.1.3 ZWEIDIMENSIONALES DATENMATERIAL

- Stichprobenkovarianz:
$$S_{X,Y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$
- Stichproben-Korrelationskoeffizient (nach Pearson)
$$R_{X,Y} = \frac{S_{X,Y}}{S_X \cdot S_Y} \qquad \in [-1, 1]$$

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov} X, Y}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Konkrete Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mit $s_x \neq 0$ gegeben. Die Gerade

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = a_0 + a_1 x$$

mit

$$a_1 = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \text{ und } a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$$

ist die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems.

2.2 SCHÄTZTHEORIE

2.3 TESTTHEORIE

(0) Beschreibung der Zufallsvariablen, wie sie verteilt ist und was bekannt ist.

(1) Wahl des Signifikanzniveaus $\alpha \in (0, 1)$

(2) Aufstellen einer (Null-)hypothese

(3) Konstruktion (und Berechnung) einer Testgröße

$$T = T(\mathbf{X})$$

(4) Konstruktion eines kritischen Bereichs K mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}_\vartheta(T \in K) \leq \alpha \text{ für alle } \vartheta \in \Theta_0$$

(5) Entscheidungsregel:
- Fall $t \in K$: Ablehnen der Nullhypothese H_0 (Test ist signifikant; $\varphi(\mathbf{x}) = 1$)
- Fall $t \notin K$: Auf Basis des durchgeführten Test ist nichts gegen die Nullhypothese einzuwenden (Test ist nicht signifikant; $\varphi(\mathbf{x}) = 0$).